This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

HN 63HW C

JOSÉ CARREIRA

Capitalisações e Amortisações

LISBOA
OFF. A VAPOR DA PAP. ESTEVÃO NUNES & FILHOS
Rua do Ouro, 56 a 60
1901

Digitized by Google

KF11683

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

JOSÉ CARREIRA

Capitalisações e Amortisações

LISBOA
ESTEVÃO NUNES & FILHOS
Rua da Assumpção, 18a 24
1900

Digitized by Google

KF11653

Digitized by Google

CAPITALISAÇÕES

Capitalisação por meio de «prestações» a juros simples

Chamamos *prestações* ás entregas periodicas de uma mesma quantia, que se verificam no principio de cada periodo, de fórma que, junto com os seus juros, formam um capital no fim de certo tempo.

A capitalisação póde ser feita a juro simples ou composto. Vamos primeiramente occupar-nos das prestações a juros simples.

Representemos por

c... o valor de cada prestação;
j .. juro de 1 real em um anno;
t... o numero de annos, durante os quaes teem logar as prestações;
C... a somma de todas as prestações e seus juros simples.

Suppômos que as prestações são annuaes, e que cada uma d'ellas se colloca no principio de cada anno. Todavia, as formulas que vamos deduzir, podem tambem ser

Digitized by Google

applicaveis, quando as entregas são semestraes, trimestraes, ou por qualquer periodo de tempo.

Se collocamos pelo espaço de t annos, e no principio de cada um d'elles a quantidade constante c, resulta que a primeira prestação, produzirá juros durante o dito tempo, e portanto se converterá em[1] ..... $c+cjt$

A segunda prestação, entregar-se-ha quando tenha decorrido um anno, ou seja no principio do segundo, e por isso será representada por..... $c+cj\ (t-1)$

A terceira prestação, converter-se-ha em..... $c+cj\ (t-2)$

E assim successivamente, até á penultima entrega, que, por se verificar no principio do penultimo anno, terá por valor..... $c+2cj$

A ultima prestação, que será entregue no principio do ultimo anno, vencerá só juro durante este, e portanto, transformar-se-ha em..... $c+cj$

Mas como a quantidade C no fim do tempo t hade ser egual á somma de todas as prestações, com os juros simples vencidos por cada uma d'ellas, segue-se que

$$C=(c+cjt)+\Big(c+cj\ (t-1)\Big)+\Big(c+cj\ (t-2)\Big)+\ldots+(c+2cj)+(c+cj)$$

Observando que no segundo membro o c está repetido a vezes como parcella, e que em todos os termos existe o factor comum cj, poderemos deduzir a seguinte egualdade

$$C=ct+cj\left(t+(t-1)+(t-2)+\ldots+2+1\right)$$

Os termos do segundo membro contidos no parenthesis principal, formam uma progressão arithmetica *decrescente* de t termos e cuja razão é -1.

Tomando-a em ordem inversa, converter-se-ha em *crescente,* passando a differença a ser $+1$, o primeiro termo 1, e o ultimo t.

---

[1] *Calculo Commercial Theorico e Pratico* por Antonio Carreira e José Francisco Carreira, pag. 6.

Digitized by Google

Sabendo-se que a somma dos termos de uma progressão arithmetica crescente é egual á semi-somma dos extremos, multiplicado pelo numero dos termos, resulta que a egualdade anterior, se reduzirá á seguinte formula geral

$$C = ct + cj \times \frac{(1+t)}{2} \times t \qquad (1)$$

ou

$$C = c\left(t + j\,(1+t) \times \frac{t}{2}\right) \qquad (2)$$

que serve para achar a somma total das prestações, com os seus juros simples, conhecendo-se a prestação annual, o tempo e a taxa.

Da formula anterior se deduz outras tres, para calcular os valores de *c*, *j* e *t*, isto é, da prestação, da taxa e do tempo.

Supponhamos que a incognita é *c*. Tirando da egualdade

$$C = c\left(t + j\,(1+t) \times \frac{t}{2}\right)$$

o valor de *c*, resulta

$$c = \frac{C}{t + j\,(1+t) \times \frac{t}{2}} \qquad (3)$$

que é a formula para calcular a importancia de uma prestação, conhecendo-se a somma total que se deseja obter, o tempo e a taxa.

Se a quantidade desconhecida é *j*, teremos

$$C = ct + cj\,\frac{(1+t)}{2} \times t$$

Digitized by Google

egualdade que dá successivamente

$$C - ct = cj\ (1+t) \times \frac{t}{2}$$

$$j = \frac{C - ct}{c\ (1+t) \times \frac{t}{2}} \qquad (4)$$

formula que nos permitte achar o valor da taxa, conhecendo-se o valor da capitalisação, da prestação e do tempo.

Se se deseja conhecer o tempo, principiaremos por fazer desapparecer o denominador da egualdade geral

$$C = ct + cj\ \frac{(1+t)}{2} \times t$$

multiplicando ambos os membros por 2, vem

$$2\,C = 2ct + cjt\ (1+t)$$

Effectuando o producto indicado no segundo termo do segundo membro, resulta

$$2\,C = 2ct + cjt + cjt^2$$

Egualdade que se póde reduzir á fórma $ax^2+bx+c=o$, das equações do 2.º gráu, ou seja

$$cjt^2 + (2c + cj)\,t - 2C = o$$

e por conseguinte

$$t = \frac{-(2c+cj) \pm \sqrt{(2c+cj)^2 - 4cj \times -2C}}{2cj}$$

ou

$$t = \frac{-(2c+cj) \pm \sqrt{(2c+cj)^2 + 8Ccj}}{2cj} \qquad (5)$$

que é a formula para determinar o numero de annos, sendo

Digitized by Google

conhecida a somma das prestações e seus juros, a prestação e a taxa.

As formulas que vimos de deduzir, são tambem applicaveis a casos em que as prestações são semestraes, trimestraes ou mensaes, sendo para isso necessario que *j* represente o juro de uma unidade em um semestre, trimestre ou mez, e *t* o numero de semestres, trimestres ou mezes.

Exemplos

1.° *Tendo-se emprestado 2:500$000 réis em prestações annuaes de 500$000 réis e tendo o devedor de os pagar, junto com os respectivos juros simples á taxa annual de 8 %, deseja-se saber qual a importancia total que o credor tem a receber no fim de 5 annos.*

Substituindo na formula (1) os respectivos valores, temos

$$C = 500\$000 \times 5 + 500\$000 \times 0{,}08 \times (1 + 5) \times \frac{5}{2}$$

ou

$$C = 2{:}500\$000 + 40\$000 \times 15$$

$$C = 2{:}500\$000 + 600\$000$$

$$C = 3{:}100\$000 \text{ réis}$$

Poder-se-hia tambem calcular este valor por meio de tantos calculos de juros, quantos os annos.

2.° *Depositou-se annualmente na Caixa Economica do Monte-pio Geral, a quantia de 900$000 réis durante 10 annos. Suppondo que o Monte-pio abona um juro annual de 3 %, deseja-se saber a importancia a levantar, no fim d'aquelle numero de annos.*

$$C = 900\$000 \times 10 + 900\$000 \times 0{,}03 \times (1 + 10) \times \frac{10}{2}$$

$$C = 9{:}000\$000 + 27\$000 \times 55$$

$$C = 10{:}485\$000 \text{ réis}$$

Digitized by Google

Calculando separadamente os juros dos depositos realizados, achamos 1:485$000 réis, que, sommado com o valor total das prestações, nos dá a importancia que encontramos acima.

3.° *Desejando receber-se no fim de 4 annos um capital de 4:600$000 réis, precisa-se conhecer a prestação annual que se tem a entregar no principio de cada anno a uma sociedade commercial que abona a taxa annual de 6 %.*

Applicando os valores á formula (3), resulta

$$c = \frac{4{:}600\$000}{4 + 0{,}06 \times (1+4) \times \frac{4}{2}}$$

$$c = \frac{4{:}600\$000}{4{,}6} = 1{:}000\$000 \text{ réis}$$

Resultado que se pode contraprovar, achando a somma das prestações no fim dos 4 annos, com os respectivos juros simples.

4.° *Tendo-se recebido no fim de 6 annos uma importancia de 2:430$000 réis, deseja-se saber o valor de cada uma das prestações, sendo o juro da capitalisação calculado á taxa annual de 10 %.*

Procedendo como no caso anterior, vem

$$c = \frac{2{:}430\$000}{6 + 0{,}10 \times (1+6) \times \frac{6}{2}}$$

$$c = \frac{2{:}430\$000}{8{,}1} = 300\$000 \text{ réis}$$

5.° *Entregando-se uma prestação de 200$000 réis no principio de cada anno, deseja conhecer-se a taxa do juro, que se calculou sobre as prestações, para que no fim de 10 annos, se obtenha um capital accumulado de 2:770$000 réis.*

Empregando a formula (4), teremos

Digitized by Google

$$j = \frac{2{:}770\$000 - 200\$000 \times 10}{200\$000 \times (1 + 10) \times \frac{10}{2}}$$

$$j = \frac{77}{1\$100} = 0{,}07$$

a taxa pedida é pois 7 %.

6.º *Tendo-se recebido no fim de 6 annos a quantia de 2:820$000 réis, accumulada por 6 prestações de 400$000 réis, qual a taxa que se calculou sobre estas prestações?*

Substituindo os dados numericos na formula respectiva, temos successivamente

$$j = \frac{2{:}820\$000 - 400\$000 \times 6}{400\$000 \times (1 + 6) \times \frac{6}{2}}$$

$$j = \frac{42}{840} = 0{,}05$$

7.º *Tendo-se obtido 660$800 réis como somma das prestações de 70$000 réis que se entregaram no principio de cada anno, junto com os seus juros simples, vencidos á taxa de 4 % ao anno, deseja-se saber qual o numero de annos durante os quaes tiveram logar as referidas prestações.*

Applicando os valores á formula (5), resulta

$$t = \frac{-(2 \times 70\$ + 70\$ \times 0{,}04) + \sqrt{(2 \times 70\$ + 70\$ \times 0{,}04)^2 + 8 \times 660\$800 \times 70\$ \times 0{,}04}}{2 \times 70\$000 \times 0{,}04}$$

$$t = \frac{-142\$800 + \sqrt{20.391{:}840\$000 + 14.801{:}920\$000}}{5\$600}$$

$$t = \frac{-142\$800 + \sqrt{35\,193{:}760\$000}}{5\$600}$$

$$t = \frac{-142\$800 + 187\$600}{5\$600}$$

$$t = \frac{44\$800}{5\$600} \text{ e } t = 8 \text{ annos}$$

Digitized by Google

8.º *Qual o tempo necessario para que em prestações de 400$000 réis se receba 5:100$000 réis a taxa de 5 %?*

Como no caso anterior empregamos a formula (5), que nos dará o valor da incognita.

$$t = \frac{-(2 \times 400\$ + 400\$ \times 0{,}05) + \sqrt{(2 \times 400\$ + 400\$ \times 0{,}05)^2 + 8 \times 5{:}100\$ \times 400\$ \times 0{,}045}}{2 \times 400\$000 \times 0{,}05}$$

$$t = \frac{-820\$000 + \sqrt{672.400{:}000\$000 + 816.000{:}000\$000}}{40\$000}$$

$$t = \frac{-820\$000 + \sqrt{1.488.400{:}000\$000}}{40\$000}$$

$$t = \frac{-820\$000 + 1{:}220\$000}{40\$000}$$

$$t = \frac{400\$000}{40\$000} = \frac{40}{4} = 10 \text{ annos}$$

As formulas anteriores são tambem applicaveis a questões em que as prestações são semestraes, trimestraes ou mensaes, mas para isso é necessario que a taxa, represente o juro de 1 unidade em um semestre, trimestre ou mez, e o tempo o numero de semestres, trimestres ou mezes.

9.º *Desejando-se receber uma pensão de 200$000 réis no principio de cada semestre, vencendo o juro annual de 6 %, necessita-se saber a cifra a que se elevou no fim de 9 annos.*

Substituindo os respectivos valores na formula (2) e attendendo ao principio que rege as taxas equivalentes, resulta,

$$C = 200\$000 \times 18 + 200\$000 \times 0{,}03 \times (1 + 18) \times \frac{18}{2}$$

$$C = 3{:}600\$000 + 1{:}026\$000$$

$$C = 4{:}626\$000$$

Digitized by Google

Podemos contraprovar este resultado, calculando á taxa de 3 %, o juro dos seguintes capitaes durante os tempos que seguem

3:600$000	réis	durante	18	semestres
3:400$000	»	»	17	»
3:200$000	»	»	16	»
3:000$000	»	»	15	»
2:800$000	»	»	14	»
2:600$000	»	»	13	»
2:400$000	»	»	12	»
2:200$000	»	»	11	»
2:000$000	»	»	10	»
1:800$000	»	»	9	»
1:600$000	»	»	8	»
1:400$000	»	»	7	»
1:200$000	»	»	6	»
1:000$000	»	»	5	»
800$000	»	»	4	»
600$000	»	»	3	»
400$000	»	»	2	»
200$000	»	»	1	»

Os juros dos 18 semestres attingem a 1:026$000 réis que addicionado á somma total das prestações prefaz réis 4:626$000.

Digitized by Google

Capitalisação por meio de «prestações» a juros compostos

Deduzida e exemplificada a formula das prestações a juros simples, passemos a buscar a formula correspondente, para quando ellas vençam juros compostos. [1]

Representemos por

c... o valor de cada prestação
j... o juro de 1 real em um anno
t... o numero d'annos durante os quaes se entregam as prestações
C... a somma total das prestações com os seus juros compostos

Se collocamos pelo espaço de *t* annos, e no principio de cada um d'elles a quantidade constante *c*, resulta que a primeira prestação estará desembolsada durante o tempo *t*, e segundo a formula de juros compostos, corresponderá a... $c\,(1+j)^{t}$

A segunda prestação verificar se-há quando tenha decorrido um anno, isto é, no principio do 2.º e por isso se converterá em..... $c\,(1+j)^{t-1}$

A terceira, adquirirá um valor egual a..... $c\,(1+j)^{t-2}$

E assim successivamente, até á penultima entrega, que, por se verificar no principo no penultimo anno, se tornará..... $c\,(1+j)^{2}$

A ultima que só estará a render juros durante um anno, será egual a [2]..... $c\,(1+j)$

---

[1] *Calculo Commercial Theorico e pratico* por Antonio Carreira e José Francisco Carreira, pag. 22.

[2] Egual valor acharíamos para a ultima prestação se, em vez de a termos deduzido por simples raciocinio a tivessemos obtido algebricamente pois seria representada por

$$c\left(1+j\right)^{t-(t-1)} \quad c\left(1+j\right)^{t} = c\,(1+j)$$

Digitized by Google

Logo o valor total das prestações, junto com os seus juros compostos no fim de t annos será

$$c(1+j)+c(1+j)^{2}+\ldots+c(1+j)^{t-2}+c(1+j)^{t-1}+c(1+j)$$

que é a somma dos termos de uma progressão geometrica crescente, cuja rasão é $(1+j)$ e designando-a, como sabemos, por C tem-se [1]

$$C=\frac{c(1+j)^{t}\times(1+j)-c(1+j)}{(1+j)-1}$$

$$C=\frac{c(1+j)^{t+1}-c(1+j)}{j}$$

Pondo o producto $c(1+j)$ em factor commum, resultará a formula fundamental, mas simplificada para as prestações

$$C=c\times\frac{1+j}{j}\times\left[(1+j)^{t}-1\right] \qquad (6)$$

$$C=\frac{c(1+j)\times\left[(1+j)^{t}-1\right]}{j}$$

que serve para conhecer a somma total das prestações com os seus juros compostos, dada a prestação annual o tempo e a taxa. Na applicação d'esta formula temos que calcular o valor da quantidade $(1+j)^{t}$ por meio dos logarithmos.

Da formula (6) se deduzem todas as outras para calcular os valores correspondentes á prestação annual e ao tempo.

O valor da taxa depende de uma equação para cuja resolução não bastam os logarithmos. Portanto, sempre

---

[1] A somma dos termos de uma progressão geometrica *crescente*, é egual ao producto do ultimo termo pela rasão menos o primeiro e a dividir pela rasão menos a unidade.

Digitized by Google

que tenhamos de resolver um problema sobre prestações, em que se busque a taxa, recorremos a uma taboa especial.

Se desejarmos determinar o valor de *c*, basta dividir os dois membros da formula (6) pelos factores d'aquella quantidade, e teremos

$$c = \frac{C}{\frac{1+j}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]}$$

$$c = \frac{C\,j}{1+j \times \left[(1+j)^t - 1\right]} \qquad (7)$$

formula que nos permitte achar o valor de uma prestação conhecendo-se a somma total d'estas com os seus juros compostos, o tempo e a taxa.

Se a incognita é *t*, principiaremos por multiplicar os dois membros da formula (6) por *j*,

$$C\,j = c \times 1 + j \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

Dividindo-os por c (1 + j), resulta

$$(1+j)^t - 1 = \frac{C\,j}{c\,(1+j)}$$

ou

$$(1+j)^t = \frac{C\,j}{c\,(1+j)} + 1$$

Equação exponencial para cuja resolução teremos que empregar os logarithmos, ou seja

$$t \log.\,(1+j) = \log.\left[\frac{C\,j}{c\,(1+j)} + 1\right]$$

Digitized by Google

e dividindo os dois membros por (1 + j), obteremos

$$t = \frac{\log. \left[\frac{C\,j}{c\,(1+j)} + 1\right]}{\log. (1+j)} \qquad (8)$$

que nos dá o valor do tempo, conhecida a somma total das prestações, o valor de cada uma d'ellas e a taxa.

Como no capitulo anterior, estas formulas são applicaveis a questões em que as prestações são semestraes, trimestraes ou mensaes, sendo necessario que *j* represente a taxa d'aquellas unidades de tempo.

Resta-nos ainda apresentar o caso especial, *do valor actual* da somma *C*, produsido por *t* entregas de *c*, realisadas no principio da cada um dos *t* annos. Este valor, collocado de uma só vez a juro composto, produz no fim de *t* annos a mesma somma que as *t* prestações da importancia *c*, cada uma d'ellas.

Sabendo-se que $c = \frac{C}{(1+j)^t}$ é a formula para determinar o capital primitivo, teremos que, dividindo ambos os membros da formula fundamental das prestações por $(1+j)^t$, resultará

$$\frac{C}{(1+j)^t} = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[\frac{(1+j)^t - 1}{(1+j)^t}\right]$$

ou

$$\frac{C}{(1+j)^t} = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t}\right]$$

representando o primeiro membro por *v*, teremos

$$v = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t}\right] \qquad (9)$$

Digitized by Google

Por ultimo póde dar-se o caso, por exemplo, das prestações serem entregues annualmente e das capitalisações dos juros terem logar por semestres, no qual suppomos que j representa a taxa por um semestre.

A primeira prestação, que se verifica no principio do 1.º anno converter-se-ha no fim de t annos, capitalisando os juros semestralmente, em.... $c(1+j)^{2t}$

A segunda prestação, que se entregará no principio do 2.º anno, e que deixará de vencer juros de dois semestres, será egual a... ..... $c(1+j)^{2t-2}$

E assim por deante, até que na penultima prestação, os juros corresponderão a 4 semestres, ou seja..... $c(1+j)^{4}$

E, pelo mesmo raciocinio a ultima se transformará em..... $c(1+j)^{2}$

Logo o valor total das prestações, junto com os seus juros compostos no fim de t annos, será

$$c(1+j)^{2}+c(1+j)^{4}+\ldots+c(1+j)^{2t-2}+c(1+j)^{2t}$$

que é a somma dos termos de uma propressão geometrica crescente, cuja razão é $(1+j)^{2}$, e designando-a por C, resulta

$$C=\frac{c(1+j)^{2t}\times(1+j)^{2}-c(1+j)^{2}}{(1+j)^{2}-1}$$

e, attendendo ao factor commum $c(1+j)^{2}$, teremos finalmente

$$C=\frac{c(1+j)^{2}\left[(1+j)^{2t}-1\right]}{(1+j)^{2}-1}$$

formula que nos permitte achar a somma total das prestações, quando estas são annuaes e as capitalisações semestraes.

Digitized by Google

10.º *Que capital se obtem no fim de 2 annos com as prestações annuaes de 3:000$000 réis, junto com os seus juros compostos á taxa de 6 %?*

Applicando a formula (6) resulta

$$C = 3{:}000\$000 \times \frac{1{,}06}{0{,}06}\,(1{,}06^{2} - 1)$$

$$C = 3{:}000\$000 \times 17{,}6667 \times 0{,}1236$$

ou

$$C = 6{:}550\$800 \text{ réis}$$

Podemos tambem calcular a importancia da somma das prestações e seus juros compostos, applicando o calculo dos juros simples.

Resolvendo o problema anterior por este meio, teremos

Importancia da 1.ª prestação entregue no principio do 1.º anno	3:000$000
Juro correspondente a um anno, $\frac{3{:}000\$000 \times 6}{100}$	180$000
Somma no fim do 1.º anno.....	3:180$000
Segunda prestação entregue no principio do 2.º anno...	3:000$000
Capital total no fim de 2 annos.....	6:180$000
Juro d'este capital durante um anno.....	370$800
Totalidade no fim do 2.º anno... ...	6:550$800

Resultado egual ao que obtivemos por meio da formula. Todavia este ultimo processo é bastante moroso para o caso de ser elevado o numero de annos.

11.º *Um individuo que tem 40 annos de idade, deseja collocar annualmente 1:000 pesetas ao juro composto de 5 %. Pergunta-se de que somma poderá dispôr quando completar 61 annos.*

Procedendo como no caso anterior, teremos

$$C = 1{:}000 \times \frac{1{,}05}{0{,}05} \times (1{,}05^{21} - 1)$$

Digitized by Google

resolvendo por logarithmos a expressão $1{,}05^{21}$ ou

$$21 \times \log.\ 1{,}05 = 21 \times 0{,}021189 = 0{,}444969$$

$$\text{N.º de } 0{,}444969 = 2{,}785923$$

Subtrahindo d'este numero uma unidade e effectuando as operações indicadas, resulta

$$C = 1{:}000 \times 21 \times 1{,}785923 = 37505{,}38 \text{ pesetas}$$

12.º *Que prestação annual devemos entregar para no fim de 10 annos obtermos um capital de 2:641$310 réis, á taxa de 5 % ao anno?*

Dando os valores á formula (7)

$$c = \frac{2{:}641\$310 \times 0{,}05}{1{,}05 \times (1{,}05^{10} - 1)}$$

$$c = \frac{2{:}641\$310 \times 0{,}05}{1{,}05 \times 0{,}628883}$$

$$c = 200\$000 \text{ réis}$$

13.º *Precisando-se obter no fim de 4 annos uma somma total de 243,5 libras, deseja-se saber quanto é preciso collocar annualmente, suppondo os juros calculados á taxa de 8 %.*

Substituindo os valores na formula (7), teremos

$$c = \frac{243{,}5 \times 0{,}08}{1{,}08 \times (1{,}08^{4} - 1)}$$

$$c = \frac{243{,}5 \times 0{,}08}{1{,}08 \times 0{,}360489} = 50 \text{ libras}$$

14.º *Tendo-se obtido com duas prestações annuaes de 3:000$000 uma somma de 6:550$800 réis á taxa de 6 %, pergunta-se durante quantos annos teve logar a entrega d'essas prestações.*

Digitized by Google

Recorrendo á formula (8), vem successivamente

$$t = \frac{\log.\left(\frac{655080 \times 0.06}{3000000 \times 1.06} + 1\right)}{\log. 1{,}06}$$

$$t = \frac{\log.\left(\frac{393048}{3180000} + 1\right)}{\log. 1{,}06}$$

$$t = \frac{\log. 1.1236}{\log. 1{,}06}$$

$$t = \frac{0{,}0506117}{0{,}02530585}$$

e

$$t = 2 \text{ annos}$$

15.° *Entregando-se todos os annos uma prestação de 150$000 réis e retirando-se no fim de um certo tempo 729$990 réis, deseja saber-se quantas prestações se entregaram, sendo o juro calculado á taxa annual de 8 %.*

Como no caso precedente

$$t = \frac{\log.\left(\frac{729990}{150000} \times \frac{0{,}08}{1{,}08} + 1\right)}{\log. 1{,}08}$$

$$t = \frac{\log.\left(\frac{58399}{162000} + 1\right)}{\log. 1{,}08}$$

$$t = \frac{\log. 1.3605}{\log. 1{,}08}$$

$$t = 4$$

16.° *Tendo-se vendido uma propriedade por 500$000 réis, a pagar em prestações eguaes durante 5 annos, e pagando o comprador um juro de 6 % por cada uma d'aquellas, deseja-se saber quanto teria que desembolsar se o pagamento se realizasse na occasião da transacção, isto é, qual o valor actual da compra.*

Digitized by Google

Applicando os valores á formula

$$v = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t}\right]$$

teremos

$$v = 100\$000 \times \frac{1{,}06}{0{,}06} \times \left[1 - \frac{1}{1{,}06^5}\right]$$

$$v = 100\$000 \times \frac{1{,}06}{0{,}06} \times \frac{0{,}3382255}{1{,}3382255}$$

$$v = 446\$510 \text{ réis}$$

Para verificarmos a exactidão d'este resultado, vejamos qual a somma accumulada por este capital no fim dos 5 annos, applicando para isso a formula dos juros compostos.

$$C = 446\$510 \times 1{,}06^5$$

$$C = 446\$510 \times 1{,}3382255$$

$$C = 597\$530 \text{ réis}$$

Pagando o comprador a propriedade em 5 prestações annuaes de 100$000 réis podemos tambem provar que o vendedor será no fim dos 5 annos embolsado d'esta mesma quantia. Empreguemos para isso a formula

$$C = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

e vir-nos-ha

$$C = 100\$000 \times \frac{1+0{,}06}{0{,}06} \times \left[(1+0{,}06)^5 - 1\right]$$

$$C = \frac{106\$000}{0{,}06} \times 0{,}3382255776$$

$$C = 597\$530 \text{ réis}$$

Digitized by Google

17.° *Tendo-se depositado annualmente na Caixa Economica do Monte-pio Geral a quantia de 100$000 réis durante 6 annos, precisa-se saber qual a quantia a credito do depositante, suppondo, que as capitalisações são semestraes e á taxa tambem semestral de 1 $\frac{1}{2}$ %.*

Applicando os valores á formula respectiva, vem

$$C = \frac{100\$000 \times 1{,}015^{2} \times \left[1{,}015^{12} - 1\right]}{1{,}015^{2} - 1}$$

$$C = \frac{103022{,}5 \times 0{,}1956179}{0{,}030225}$$

$$C = 666\$765 \text{ réis}$$

Para completa elucidação, examinemos o calculo apresentado na pagina seguinte.

Digitized by Google

1.ª prestação entregue no principio do 1.º anno.....	100$000
Juro do 1.º semestre.....	1$500
	101$500
Juro do 2.º semestre.....	1$522
Capital no fim do 1.º anno.....	103$022
2.ª prestação entregue no principio do 2.º anno.....	100$000
	203$022
Juro do 1.º semestre.....	3$046
	206$068
Juro do 2.º semestre.....	3$090
Somma no fim do 2.º anno.....	209$158
3.ª prestação entregue no principrio do 3.º anno.....	100$000
	309$158
Juro do 1.º semestre.....	4$638
	313$796
Juro do 2.º semestre.....	4$707
Importancia no fim do 3.º anno.....	318$503
4.ª prestação entregue no principio do 4.º anno.....	100$000
	418$503
Juro do 1.º semestre.....	6$277
	424$780
Juro do 2.º semestre.....	6$371
Quantia no fim do 4.º anno.....	431$151
5.ª prestação entregue no principio do 5.º anno.....	100$000
	531$151
Juro do 1.º semestre.....	7$967
	539$118
Juro do 2.º semestre.....	8$086
Valor no fim do 5.º anno.....	547$204
6.ª prestação entregue no principio do 6.º anno.....	100$000
	647$204
Juro do 1.º semestre.....	9$708
	656$912
Juro do 2.º semestre.....	9$853
Totalidade a credito do depositante....	666$765

Digitized by Google

Amortisação por meio de «annuidades» a juros simples

Denomina-se *annuidade* ás entregas periodicas d'uma mesma quantia no fim de cada anno e que teem por objecto amortisar, depois de certo tempo, uma divida contrahida e juros vencidos. Estes pagamentos tomam pois, o nome generico de *annuidades*, podendo comtudo, ser entregues ao credor semestral, trimestral ou mensalmente.

Amortisação é a quantia que se entrega para liquidação d'uma divida. A liquidação póde ser feita por uma só vez, ou por desembolsos parciaes, sobre os quaes se abonam os respectivos juros.

Quando estas quantias se referem a um illlmitado numero de annos tomam a designação de *fóros* ou *rendas perpetuas,* quando porém esse numero de annos se acha circunscripto á vida do credor, chamar-lhe-hemos *pensões* ou *rendas vitalicias*.

Por agora, trataremos d'uma terceira hypothese, isto é, quando a palavra *annuidade,* exprime prestações annuaes, pagas para embolso d'um certo capital e seus respectivos juros.

Representemos por

c... o valor de cada annuidade
j .. juro de 1 real em cada anno
t... o tempo durante o qual se entregam as annuidades
C... a somma das annuidades e seus juros, ou seja a importancia total a amortisar

Se collocamos pelo espaço de *t* annos, e no fim de cada um d'elles a quantidade constante *c*, resulta que a primeira annuidade produzirá juros durante *t*—1 annos e será representada por..... $c + cj\ (t-1)$

A segunda annuidade entregar-se-ha quando tenham decorridos dois annos, ou seja no fim do segundo anno, portanto converter-se-ha em..... $c + cj\ (t-2)$

Digitized by Google

Pelo mesmo raciocinio, a terceira será..... $c+cj\ (t-3)$
E assim successivamente, até á penultima entrega, que, será representada por..... $c+cj$
visto no penultimo anno, o tempo ser egual á unidade.
No ultimo anno encontraremos sómente o valor da annuidade, isto é..... c
pois que, n'este caso o valor do t é zero.

Se C representa a somma de todas as annuidades e respectivos juros, teremos

$$C=\Big(c+cj\,(t-1)\Big)+\Big(c+cj\,(t-2)\Big)+\Big(c+cj\,(t-3)\Big)+\ldots.$$
$$+(c+cj)+c \qquad (10)$$

Observando que no segundo membro o c está repetido t vezes como parcella e que cj é factor commum, resulta

$$C=ct+cj\Big[(t-1)+(t-2)+(t-3)+\ldots.+1\Big] \qquad (11)$$

Os termos do segundo membro, contidos no parenthesis grande, formam uma progressão arithmetica, e como a somma dos termos d'esta progressão é egual a

$$(1+t-1)\times\frac{t-1}{2}$$

a egualdade (11) converter-se-ha em

$$C=ct+cj\times\frac{(1+t-1)\times(t-1)}{2}$$

$$C=ct+cj\times\frac{t\times(t-1)}{2}$$

ou seja a formula geral

$$C=ct+cjt\times\frac{(t-1)}{2} \qquad (12)$$

Digitized by Google

que serve para se achar a somma total das annuidades entregues no fim de cada anno e seus juros simples, ou seja a quantidade que se deseja amortisar, conhecida a importancia de cada annuidade, o tempo e a taxa.

D'esta formula se podem tambem deduzir outras tres, para o calculo da annuidade, tempo e taxa.

Se desejamos determinar o valor da annuidade, attendamos na formula (12) ao factor commum c, teremos

$$C = c\left[t + j\,t \times \frac{(t-1)}{2}\right]$$

d'onde

$$c = \frac{C}{t + j\,t \times \frac{(t-1)}{2}} \qquad (13)$$

formula que nos dá o valor da annuidade, sendo conhecido a somma total das amortisações, a taxa e o tempo.

Se a incognita é j, passemos para o primeiro membro o factor ct da formula

$$C = c\,t + c\,j\,t \times \frac{(t-1)}{2}$$

ou

$$C - c\,t = c\,j\,t \times \frac{(t-1)}{2}$$

Dividindo ambos os membros da egualdade por j, e achando o valor d'esta quantidade, vem

$$j = \frac{C - c\,t}{c\,t \times \frac{(t-1)}{2}} \qquad (14)$$

formula para determinar a taxa, conhecido o tempo, a annuidade e a somma total das amortisações.

Digitized by Google

Se se deseja calcular o valor de t, multiplicaremos por 2 os dois membros da egualdade (12)

$$2\,C = 2\,c\,t + c\,j\,t \times (t-1)$$

Effectuando o producto no segundo termo do segundo membro, resulta

$$2\,C = 2\,c\,t + c\,j\,t^2 - c\,j\,t$$

egualdade que se póde reduzir á formula geral das equações do segundo grau, $ax^2 + bx + c = o$, attendendo ao factor t, que é commum ao primeiro e terceiro termo do segundo membro. Portanto, vem

$$c\,j\,t^2 + (2\,c - c\,j)\,t - 2\,C = o$$

e

$$t = \frac{-(2\,c - c\,j) \pm \sqrt{(2\,c - c\,j)^2 - 4\,c\,j \times -2\,C}}{2\,c\,j}$$

ou

$$t = \frac{-(2\,c - c\,j) \pm \sqrt{(2\,c - c\,j)^2 + 8\,C\,c\,j}}{2\,c\,j} \qquad (15)$$

formula que determina o valor do tempo, sendo conhecidas as tres quantidades restantes.

Como nas prestações a juros simples, tambem as formulas que vimos de expôr se podem applicar no caso das annuidades serem semestraes, trimestraes ou mensaes, como demonstrámos no anterior capitulo.

18.º *Deseja-se saber que capital se poderá amortisar no fim de 4 annos, entregando no fim de cada um d'elles a annuidade de 40$000 réis, sobre a qual é abonado o juro de 5 %.*

Digitized by Google

Applicando estes dados numericos á formula (12) resulta

$$C = 40\$000 \times 4 + 40\$000 \times 0{,}05 \times 4 \times \frac{(4-1)}{2}$$

$$C = 160\$000 + 12\$000$$

$$C = 172\$000 \text{ réis}$$

19.° *Para liquidação d'uma divida é necessario pagar durante 10 annos, e no fim de cada um d'elles, a quantia de 80$000 réis, sobre a qual se calcula juro á taxa de 6 %. Qual a importancia da divida a amortisar?*

Procedendo como no caso anterior, vem

$$C = 80\$000 \times 10 + 80\$000 \times 0{,}06 \times 10 \times \frac{9}{2}$$

$$C = 800\$000 + 216\$000$$

$$C = 1{:}016\$000 \text{ réis}$$

20.° *Deseja-se amortisar um capital de 3:195$000 réis no periodo de 15 annos. Qual a annuidade que tem de se entregar, vencendo um juro simples á razão de 6 %?*

Substituindo estes valores na formula (13), resulta successivamente

$$c = \frac{3{:}195\$000}{15 + 0.06 \times 15 \times 7}$$

$$c = \frac{3{:}195\$000}{15 + 6{,}3} = \frac{3{:}195\$000}{21{,}3}$$

$$c = 150\$000 \text{ réis}$$

21.° *Que annuidade se deverá entregar para no fim de 20 annos se amortisar uma divida de 6:900$000 réis, vencendo as annuidades um juro simples á razão de 4 % ao anno?*

Digitized by Google

Empregando ainda a formula (13), temos

$$c = \frac{6{:}900\$000}{20 + 0{,}04 \times 20 \times 9{,}5}$$

$$c = \frac{6{:}900\$000}{20 + 7{,}6}$$

$$c = 250\$000$$

22.° *Qual a taxa que se deve calcular sobre as annuidades de 90$000 réis, entregues durante 6 annos e no fim de cada um d'elles, para amortisar um capital de 648$000 réis?*

Servindo-nos da formula (14), vem

$$j = \frac{648\$000 - 90\$000 \times 6}{90\$000 \times 6 \times \frac{(6-1)}{2}}$$

$$j = \frac{108\$000}{1{:}350\$000} = \frac{108}{1\$350}$$

$$j = 0{,}08$$

23.° *Qual será a taxa que se deverá calcular sobre as annuidades de 400$000 réis, que se entregaram durante 6 annos para amortisar um capital de 2:700$000 réis?*

Empregando a formula respectiva, vem

$$j = \frac{2{:}700\$000 - 400\$000 \times 6}{400\$000 \times 6 \times \frac{6-1}{2}}$$

$$j = \frac{300\$000}{6{:}000\$000} = 0.05$$

ou seja 5 $^0/_0$.

24.° *Qual será o numero de annos durante os quaes devemos entregar a annuidade de 30$000 réis, de fórma*

Digitized by Google

que junto com os seus juros simples á taxa de 6 % amortisem uma divida de 290$400 réis?

Applicando os dados á respectiva formula, vem-nos successivamente

$$t = \frac{-(2\times 30\$ - 30\$\times 0{,}06) + \sqrt{(2\times 30\$ - 30\$\times 0{,}06)^2 + 8\times 290\$400\times 30\$\times 0{,}06}}{2\times 30\$000\times 0{,}06}$$

$$t = \frac{-58\$200 + \sqrt{3.387{:}240\$000 + 4.181{:}760\$000}}{3\$600}$$

$$t = \frac{-58\$200 + 87\$000}{3\$600}$$

$$t = \frac{288}{36} = 8 \text{ annos}$$

25.° *Determinar o numero de annos, durante os quaes se tem que entregar as annuidades de 100$000 réis para que com os seus juros simples á taxa de 6 % se possa amortisar um capital de 3:900$000 réis.*

Procedendo como no caso anterior, resulta

$$t = \frac{-(2\times 100\$ - 100\$\times 0{,}10) + \sqrt{(2\times 100\$ - 100\$\times 0{,}10)^2 + 8\times 3{:}900\$\times 100\$\times 0{,}10}}{2\times 100\$000\times 0{,}10}$$

$$t = \frac{-190\$000 + \sqrt{36.100{:}000\$000 + 312.000{:}000\$000}}{20\$000}$$

$$t = \frac{-190\$000 + 590\$000}{20\$000}$$

$$t = \frac{400\$000}{20\$000} = \frac{40}{2} = 20 \text{ annos}$$

Digitized by Google

Amortisação por meio de «annuidades» a juros compostos

Exposta a theoria e exemplificação das annuidades a juros simples, vamos deduzir as respectivas formulas para quando ellas vençam juros compostos.

Designemos por

c... o valor de cada annuidade
j... o juro de 1 real em cada anno
t... o tempo
C... a somma total de todas as annuidades com os seus juros compostos

Se collocamos pelo espaço de *t* annos e no fim de cada um d'elles a quantidade constante *c*, resulta que a primeira annuidade produzirá juros durante t—1 annos, e portanto segundo a formula dos juros compostos se converterá em..... $c \times (1+j)^{t-1}$

A segunda annuidade entregar-se-ha quando tenha decorrido 2 annos, isto é, no fim do 2.º e portanto se converterá em..... $c \times (1+j)^{t-2}$

Pela mesma razão a terceira adquirirá um valor egual a $c \times (1+j)^{t-3}$

E assim successivamente, até á penultima prestação, que por ser entregue no fim do penultimo anno será egual a..... $c \times (1+j)$

A ultima prestação será entregue no fim do ultimo anno, não vencendo por isso juro algum. Então o valor da annuidade é unicamente..... c

Por conseguinte o valor total das annuidades junto com os seus juros compostos no fim de *t* annos será

$$c + c(1+j) + \ldots + c(1+j)^{t-3} + c(1+j)^{t-2} + c(1+j)^{t-1}$$

que é a somma dos termos de uma progressão geometrica crescente cuja razão é $(1+j)$, e designando-a por C, teremos

Digitized by Google

$$C = \frac{c\,(1+j)^{t-1} \times (1+j) - c}{(1+j) - 1}$$

ou

$$C = \frac{(1+j)^{t} - c}{j}$$

pondo em evidencia o factor commum c, vem

$$C = \frac{c \times \left[(1+j)^{t} - 1\right]}{j} \qquad (16)$$

ou

$$C = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^{t} - 1\right]$$

formula que serve para averiguar a somma total das annuidades entregues no fim de cada anno, junto com os seus juros compostos, ou seja a importancia que se deseja amortisar, conhecendo-se a importancia da annuidade, o tempo e a taxa.

D'esta formula se deduzem outras para achar os valores correspondentes á annuidade e á taxa. Para calcular o valor da taxa, ter-se-hia que resolver uma equação do grau $(t+1)$ e por isso sempre que tenhamos que procurar aquella quantidade recorreremos a umas tabellas que inserimos adiante.

Se desejamos determinar o valor da annuidade, multiplicaremos por j os dois membros da formula

$$C = \frac{c\left[(1+j)^{t} - 1\right]}{j}$$

ou seja

$$C\,j = c \times \left[(1+j)^{t} - 1\right]$$

Digitized by Google

e tirando o valor de c, resulta

$$c = \frac{C\,j}{(1+j)^{t} - 1} \qquad (17)$$

pelo que podemos estabelecer a seguinte regra:

Para calcular a importancia da annuidade, multiplica-se a quantidade que se deseja amortisar pela taxa e divide-se este producto pela differença que resulta entre a somma de um mais a taxa, elevada a uma potencia de um grau egual ao numero de annos e a unidade.

Se a incognita é t, principiaremos, como no caso anterior, por fazer desapparecer o denominador da formula (16) multiplicando por j os dois membros da egualdade.

$$C\,j = c \times \left[(1+j)^{t} - 1\right]$$

Dividindo ambos os membros por c, e invertendo-os, resultará

$$(1+j)^{t} - 1 = \frac{C\,j}{c}$$

ou

$$(1+j)^{t} = \frac{C\,j}{c} + 1$$

Equação exponencial, para cuja resolução temos que empregar os logarithmos

$$t \times \log.(1+j) = \log.\left[\frac{C\,j}{c} + 1\right] \qquad (18)$$

que é a formula para achar o numero de annos, conhecendo-se a somma total que se deseja amortisar, a importancia da annuidade e a taxa.

Digitized by Google

Nos problemas que seguem, o valor de *C* representa a importancia da divida contrahida, com os juros compostos que vencem durante o tempo do emprestimo, pois na deducção da respectiva formula, partimos do principio que a somma das annuidades e seus juros era egual a *C*, isto é, ao valor do emprestimo tambem com os seus juros.

Adiante veremos quaes as formulas a adoptar quando *C* representar sómente o valor do emprestimo.

26.° *Entregando-se durante 10 annos a annuidade de 360$000 réis, pergunta-se que capital se poderá amortisar abonando sobre as annuidades 6 % de juro.*

Dando os valores á formula

$$C = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]$$

teremos

$$C = \frac{360\$000}{0{,}06} - \times \left[1{,}06^{10} - 1 \right]$$

e

$$C = 6{:}000\$000 \times 0.7908479$$

$$C = 4{:}743\$085 \text{ réis}$$

27.° *Deseja-se saber que capital poderá amortisar-se no fim de 30 annos, se entregarmos no fim de cada um d'elles a annuidade de 180$000 réis, sobre a qual nos abonam um juro composto de 4 1/2 %.*

Procedendo como no problema anterior, vem

$$C = 4{:}000\$000 \times 2{,}7453206$$

$$C = 10{:}981\$280 \text{ réis}$$

28.° *Para se reembolsar em 20 annos um capital de 3:573$370 réis, deseja-se saber que annuidade se tem a entregar no fim de cada anno, para que a somma d'estas*

Digitized by Google

com os respectivos juros compostos á razão de 4 % ao anno, amortise aquella quantia.

Empregando a formula (17), resulta

$$c = \frac{3{:}573\$370 \times 0{,}04}{1{,}04^{20} - 1}$$

$$c = 120\$000 \text{ réis}$$

29.º *Que annuidade se tem a pagar para extinguir em 15 annos um debito de 6:473$570 réis á taxa de 5 %?*

Como no caso precedente, temos

$$c = \frac{6{:}473\$570 \times 0{,}05}{1{,}05^{15} - 1}$$

$$c = 300\$000 \text{ réis}$$

30.º *Tendo o governo contrahido um emprestimo de 996:582$750 réis, e pagando annualmente a quantia de 15:000$000 réis, precisa-se saber quantos annos são precisos para a liquidação, vencendo as annuidades um juro de 5 %.*

Empregando a formula respectiva, ter-se-ha

$$t = \frac{\log. \left(\frac{996{:}582\$750 \times 0{,}05}{15{:}000\$000} + 1 \right)}{\log. 1{,}05}$$

$$t = \frac{\log. 4{,}3219425}{\log. 1{,}05}$$

$$t = \frac{0{,}6356790}{0{,}0211893}$$

$$t = 30 \text{ annos.}$$

Digitized by Google

31.° *Durante quantos annos se amortisa uma divida de 6:110$765 réis, entregando annuidades de 450$000 réis á taxa de 10 %?*

Empregando como na questão precedente a formula do tempo, vem-nos successivamente

$$t = \frac{\log.\left(\frac{6:110\$765 \times 0,1}{450\$000} \times 1\right)}{\log. 1,1}$$

$$t = \frac{\log. 2,3579478}{\log. 1,1}$$

$$t = \frac{0,37253421}{0,04139269}$$

$$t = 9 \text{ annos}$$

32.° *Que tempo é necessario para se amortisar um capital de 800$000 réis, sendo as annuidades de 32$000 réis á taxa annual de 5%?*

Applicando os valores á formula, vem

$$t = \frac{\log.\left(\frac{800\$000 \times 0,05}{32.000} + 1\right)}{\log. 1,05}$$

$$t = \frac{\log. 2,25}{\log. 1,05}$$

$$t = 16^{a} - 7^{m} - 17^{d}$$

Digitized by Google

Da formula

$$c = \frac{C\,j}{(1+j)^t - 1} = C \times \frac{j}{(1+j)^t - 1}$$

se deduz facilmente que a fracção $\frac{j}{(1+j)^t - 1}$ representa a importancia que devemos destinar annualmente á amortisação por cada unidade da somma que se tem a amortisar, e representando essa quantia por p, resulta

$$p = \frac{j}{(1+j)^t - 1}$$

egualdade que dá successivamente

$$p \times \left[(1+j)^t - 1\right] = j$$

$$p \times (1+j)^t - p = j$$

$$(1+j)^t = \frac{j+p}{p}$$

tomando os logarithmos, teremos

$$t \times \log.\,(1+j) = \log.\,(j+p) - \log.\,p$$

e portanto

$$t = \frac{\log.\,(j+p) - \log.\,p}{\log.\,(1+j)} \qquad (19)$$

formula que nos dá a conhecer o numero de annos necessarios para a amortisação de qualquer capital, sabendo-se a taxa de juros das annuidades e a importancia annual por cada unidade, que se destina á amortisação.

33.° *Suppondo que se contrae um emprestimo, para ser pago em annuidades de 10 %, deseja-se conhecer que tempo é necessario para o extinguir, sendo o juro calculado á taxa annual de 5 %.*

Digitized by Google

Substituindo os valores na formula (19), teremos

$$t = \frac{\log.\ (0{,}05 + 0{,}10) - \log.\ 0{,}10}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\log.\ 0{,}15 - \log.\ 0{,}10}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\overline{1}{,}17609126 - \overline{1}}{0{,}0211893}$$

$$t = \frac{0{,}17609126}{0{,}0211893} = 8^{a} - 3^{m} - 21^{d}$$

Resultado que podemos contraprovar resolvendo o seguinte problema:

34.° *Qual o tempo preciso para se amortisar o capital de 1:000$000 réis pagando-se annuidades de 100$000 réis á taxa annual de 5 %?*

Empregando a formula

$$t = \frac{\log.\left(\frac{C\,j}{c} + 1\right)}{\log.\ (1 + j)}$$

vem

$$t = \frac{\log.\left(\frac{1:000\$000 \times 0{,}05}{100\$000} + 1\right)}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\log.\ 1{,}5}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{0{,}17609126}{0{,}0211893}$$

$$t = 8^{a} - 3^{m} - 21^{d}$$

35.° *Qual o tempo preciso para se amortisar um emprestimo feito nas seguintes condições: destinar 4 % do capital para amortisação, e as annuidades vencerem um juro annual de 5 %.*

Digitized by Google

Para resolução d'este problema, appliquemos a formula (19) que por substituição nos dá

$$t = \frac{\log.\ (0{,}05 + 0{,}04) - \log.\ 0{,}04}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\log.\ 0{,}09 - 0{,}04}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\overline{2},95424251 - \overline{2},60205999}{0{,}0211893}$$

$$t = \frac{0{,}35218252}{0{,}0211893} = 16^{a} - 7^{m} - 17^{d}$$

Este resultado encontramol-o no problema 32.°, pois se n'elle compararmos a amortisação com o capital, observamos que ella está na rasão de 4 %. D'aqui se conclue que, o valor de *t*, pode-se determinar pelas formulas (18) e (19), sendo necessario para esta ultima, que a taxa do juro e a relação entre a amortisação e o capital correspondam aos valores attribuidos a *j* e *p*.

Se, por ultimo queremos achar o *valor actual*, que representaremos por *v*, ou seja o capital que, collocado de uma só vez a juro composto, durante os *t* annos, produza a mesma somma C que as annuidades, basta dividir os dois membros da formula $C = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]$ por $(1+j)^t$, e sabendo que $\frac{C}{(1+j)^t} = v$, vem

$$v = \frac{\frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]}{(1+j)^t}$$

e

$$v = \frac{c}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t} \right] \quad (20)$$

[1] *Calculo Commercial Theorico e Pratico* por Antonio Carreira e José Francisco Carreira, pag. 45.

Digitized by Google

36.° *Sabendo-se que 30 annuidades de 180$000 réis á taxa de 4 1/2 %, amortisam um capital de 10:981$280 réis, deseja-se calcular o valor actual, ou seja a quantia primitiva, que, collocada a juros compostos produza aquella somma.*

Sendo n'este caso $t = 30$ e applicando estes valores á formula (20), resulta que

$$v = \frac{180\$000}{0{,}045} \times \left(1 - \frac{1}{1{,}045^{30}}\right)$$

$$v = 4{:}000\$000 \times 0{,}733$$

$$v = 2{:}932\$000 \text{ réis}$$

Achando a somma accumulada por este capital, pela formula já conhecida de juros compostos, encontramos a importancia de 10:981$280 réis.

37.° *O capital de 1:173$320 réis póde ser pago com 5 annuidades de 200$000 réis á taxa annual de 8 %. Pretende-se conhecer o seu valor actual.*

Como no caso precedente

$$v = \frac{200\$000}{0{,}08} \times \left(1 - \frac{1}{1{,}08^{5}}\right)$$

$$v = 2{:}800\$000 \times \frac{0{,}469328}{1{,}469328}$$

$$v = 798\$540 \text{ réis}$$

38.° *Effectuou-se a compra de uma propriedade por 6:000$000 réis a pagar ou em 8 prestações, sendo a primeira no fim do 1.° anno, a 2.ª no fim do 2.° e assim successivamente, ou no acto da escriptura. Deseja-se em qualquer dos casos, saber quanto o comprador tem a desembolsar, de fórma que, não haja prejuizo para qualquer das partes. A transacção é feita á taxa de 5 %.*

Digitized by Google

E' claro, que o vendedor não se importa que o comprador prefira qualquer das fórmas de pagamento; o que quer é que, em qualquer dos casos se encontre no fim dos 8 annos com o mesmo capital accumulado.

1.ª hypothese — Pagamento em prestações

Vamos procurar a importancia despendida pelo comprador, applicando para isso a formula (16)

$$C = \frac{750\$000}{0{,}05} \times (1{,}05^8 - 1)$$

e

$$C = 7{:}161\$825 \text{ réis}$$

isto significa que, se o vendedor, depositasse immediatamente as prestações a render juros compostos á taxa de 8 %, teria á sua disposição no fim dos 8 annos aquelle capital.

2.ª hypothese — Pagamento no acto da escriptura

N'este caso o comprador só teria que desembolsar uma quantia v, que a render juros compostos á mesma taxa, produzisse no fim dos 8 annos uma somma accumulada de 7:161$825 réis. Estamos pois, transportados a um calculo de valor actual, que o effectuaremos applicando os respectivos valores á formula (20)

$$v = \frac{750\$000}{0{,}05} \times \left(1 - \frac{1}{1{,}05^8}\right)$$

$$v = 15{:}000\$000 \times 0{,}3231604$$

$$v = 4{:}847\$405 \text{ réis}$$

quantia a desembolsar pelo comprador, e que, collocada a juros compostos pelo vendedor, daria uma somma egual á

Digitized by Google

que receberia, se vendesse a propriedade em prestações, o que se prova com a formula de juros compostos

$$C = 4{:}847\$405 \times 1{,}05^{8}$$

$$C = 7{:}161\$825 \text{ réis}$$

O *C* que figura nas formulas das annuidades, póde representar simplesmente a importancia da divida contrahida, ou a somma d'esta com os juros compostos que vence; n'este ultimo caso, póde calcular-se separadamente a quanto sóbe a referida somma, applicando a formula $A = a \times (1+j)^t$ dos juros compostos, e substituindo o primeiro membro da formula $C = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$, pela expressão $a \times (1+j)^t$, (1)

$$a \times (1+j)^t = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

Para nos desembaraçarmos do expoente *t*, procederemos ás seguintes operações:

Multiplicarmos os dois membros por *j*

$$a\,j \times (1+j)^t = c \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

---

1 O *C* da formula $C = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$, representa como já sabemos, a somma das annuidades e seus juros, e portanto representa tambem a importancia desembolsada e juros compostos, vencidos durante o tempo do emprestimo. Comprehende-se pois a substituição de *C* pelo segundo membro da formula $A = a \times (1+j)^t$, em que a, representa o valor da divida primitiva.

Digitized by Google

Effectuarmos o producto indicado no segundo membro

$$a\,j \times (1+j)^t = c\,(1+j)^t - c$$

Passarmos o termo $-c$ para o primeiro membro

$$a\,j \times (1+j)^t + c = c\,(1+j)^t$$

Dividirmos ambos os membros por $(1+j)^t$

$$\frac{a\,j \times (1+j)^t + c}{(1+j)^t} = c$$

ou

$$a\,j + \frac{c}{(1+j)^t} = c$$

e ainda

$$\frac{c}{(1+j)^t} = c - a\,j$$

Tomando os logarithmos

$$\log.\ c - t \log.\ (1+j) = \log.\ (c - a\,j)$$

Passando para o segundo membro o termo log. c e multiplicando todos os termos por -1 para a incognita se tornar positiva, vem (1)

$$t \times \log.\ (1+j) = \log.\ c - \log.\ (c - a\,j)$$

ou

$$t = \frac{\log.\ c - \log.\ (c - a\,j)}{\log.\ (1+j)} \qquad (21)$$

formula a empregar para achar o numero de annos, quando só é conhecida a *importancia primitiva da divida contrahida.*

---

1 *Calculo Commercial Theorico e Pratico* por Antonio Carreira e José Francisco Carreira, pag. 46.

Digitized by Google

Se quizermos deduzir o valor do capital primitivo, substituimos o primeiro membro da formula $C=\frac{c}{j}\times\left[(1+j)^t-1\right]$ pelo segundo membro da formula de juros compostos, o que dá

$$a\times(1+j)^t=\frac{c}{j}\times\left[(1+j)^t-1\right]$$

Dividindo ambos os membros por $(1+j)^t$, vem [1]

$$a=\frac{c\times(1+j)^t-1}{(1+j)^t\times j} \qquad (22)$$

egualdade identica á formula (20) e que foi deduzida quando tratámos do *valor actual.*

Se a incognita é *c,* isto é, a annuidade, multipliquemos por *j* os dois membros da formula

$$a\times(1+j)^t=\frac{c}{j}\times\left[(1+j)^t-1\right]$$

resultando

$$j\,a\times(1+j)^t=c\times\left[(1+j)^t-1\right]$$

ou

$$c=\frac{a\times(1+j)^t\times j}{(1+j)^t-1} \qquad (23)$$

egualdade que nos dà o valor da annuidade quando conhecida a importancta do emprestimo.

39.º *Contrahiu-se um emprestimo de 1:227$825 réis para ser pago em annuidades de 159$010 réis. Vencendo*

[1] Formula (3) a pag. 45 do *Calculo Commercial Theorico e Pratico,* por Antonio Carreira e José Francisco Carreira.

Digitized by Google

as annuidades um juro de 5 %, precisa-se saber no fim de quantos annos se amortisa aquelle capital.

Este problema differe dos anteriores, em a quantia do emprestimo ser a verdadeira importancia desembolsada, ao passo que nos outros problemas, a importancía do emprestimo é representada pela importancia da divida contrahida com o juro d'essa quantia durante o tempo do emprestimo.

Appliquemos, pois, a formula (21)

$$t = \frac{\log.\ 159\$010 - \log.\ (159\$010 - 1{:}227\$825 \times 0{,}05)}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\log.\ 159\$010 - (159\$010 - 61\$390)}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{\log.\ 159\$010 - 97\$620}{\log.\ 1{,}05}$$

$$t = \frac{5{,}2014244 - 4{,}9895388}{0{,}0211893}$$

$$t = 10 \text{ annos.}$$

E' evidente que esta questão póde tambem ser resolvida pela formula

$$t = \frac{\log.\ \left(\frac{Cj}{c} + 1\right)}{\log.\ (1+j)}$$

em que C representa a somma a total das annuidades com os seus respectivos juros, ou seja o capital accumulado pela importancia prtmitiva do emprestimo. Posto isto, vejamos qual é o valor adquirido pelo capital 1:227$825 réis em 10 annos á taxa de 5 %, empregando para isso a formula de juros compostos

$$A = 1{:}227\$825 \times 1{,}05^{10}$$

$$A = 2{:}000\$000$$

Digitized by Google

valor que substituimos no C da formula acima

$$t = \frac{\text{l. g.} \left(\frac{2{:}000\$000 \times 0{,}05}{159\$010} + 1 \right)}{\text{log. } 1{,}05}$$

$$t = \frac{\text{log.} \left(\frac{100\$000}{159\$010} + 1 \right)}{\text{log. } 1{,}05}$$

$$t = \frac{\text{log.} \left(\frac{259\$010}{159\$010} \right)}{\text{log. } 1{,}05}$$

$$t = \frac{\text{log. } 1{,}62839}{\text{log. } 1{,}05} = \frac{0{,}211891}{0{,}0211893} = 10 \text{ annos}$$

Para exemplificação das formulas (22) e (23), appliquemos respectivamente os exemplos 29.º e 31.º

40.º *Tendo-se pago 15 annuidades de 300$000 réis, deseja-se conhecer a importancia do emprestimo contrahido, sendo o juro calculado á taxa de 5 %.*

Substituindo os valores na formula (22) resulta

$$a = \frac{300\$000 \times 1{,}05^{15} - 1}{1{,}05^{15} \times 0{,}05}$$

$$a = \frac{300\$000 \times 1{,}0789282}{2{,}0789282 \times 0{,}05}$$

$$a = 3{:}113\$900 \text{ réis}$$

Se este emprestimo não fosse reembolsado em 15 annuidades de 300$000 réis, mas sim por uma só vez no fim do 15.º anno, o devedor teria que entregar 6:473$570 réis, que é a somma accumulada pelo capital 3:113$900 réis á taxa de 5 % em 15 annos.

Digitized by Google

41.° *Levantou-se um emprestimo de 2:591$565 réis para ser pago durante 9 annos, á taxa annual de 10 %. Qual a importancia da annuidade?*

Empregando a formula (23) teremos

$$c = \frac{2{:}591\$565 \times 1{,}10^{9} \times 0{,}10}{1{,}10^{9} - 1}$$

$$c = \frac{2{:}591\$565 \times 0{,}23579478}{1{,}3579478}$$

$$c = 450\$000 \text{ réis}$$

A somma das 9 annuidades de 450$000 réis com os respectivos juros compostos, dá uma totalidade de réis 6:110$775, que as substituiria se o pagamento integral fosse feito por uma só vez no fim dos 9 annos.

Digitized by Google

Com os dados do problema 39.º apresentamos os seguintes quadros de amortisação, por onde se vê que o devedor paga 10 annuidades de 159$010 réis, ou sejam 1:590$100 réis, que, sommado com os juros respectivos na importancia de 409$900 réis, prefaz um total de réis 2:000$000.

Importancia da annuidade: 159$010 réis

ANNOS	Amortisação annual	Juro annual
Primeiro	97$620	61$390
Segundo	102$500	56$510
Terceiro	107$625	51$385
Quarto	113$005	46$005
Quinto	118$655	40$355
Sexto	124$585	34$425
Setimo	130$815	28$195
Oitavo	137$355	21$655
Nono	144$230	14$780
Decimo	151$435	7$575
	1:227$825	362$275

Conclue-se, portanto, que o devedor só paga de juros 362$275 réis.

Digitized by Google

Deve A Haver

Importancia recebida	1:227$825	Pagamento das seguintes annuidades:	
Juro composto adquirido por este capital durante 10 annos á taxa de 5 %.	772$175	1.ª annuidade	159$010
		Juro no fim do 2.º anno..	7$950
		2.ª annuidade	159$010
			325$970
		Juro no fim do 3.º anno..	16$300
		3.ª annuidade	159$010
			501$280
		Juro no fim do 4.º anno..	25$065
		4.ª annuidade	159$010
			685$355
		Juro no fim do 5.º anno..	34$265
		5.ª annuidade	159$010
			878$630
		Juro no fim do 6.º anno..	43$930
		6.ª annuidade	159$010
			1:081$570
		Juro no fim do 7.º anno..	54$075
		7.ª annuidade	159$010
			1:294$655
		Juro no fim do 8.º anno..	64$730
		8.ª annuidade	159$010
			1:518$395
		Juro no fim do 9.º anno..	75$920
		9.ª annuidade	159$010
			1:753$325
		Juro no fim do 10.º anno.	87$665
		10.ª annuidade	159$010
	2:000$000		2:000$000

Digitized by Google

Deve		A	Haver
Importancia recebida	1:227$825	Pagamento das seguintes annuidades:	
Juro composto adquirido por este capital durante 10 annos á taxa de 5 %	772$175	1.ª no fim do 1.º anno.	159$010
		Juro composto em 9 annos	87$665
			246$675
		2.ª no fim do 2.º anno..	159$010
		Juro composto em 8 annos	75$920
			481$605
		3.ª no fim do 3.º anno..	159$010
		Juro composto em 7 annos	64$730
			705$345
		4.ª no fim do 4.º anno..	159$010
		Juro composto em 6 annos	54$075
			918$430
		5.ª no fim do 5.º anno..	159$010
		Juro composto em 5 annos	43$930
			1:121$370
		6.ª no fim do 6.º anno..	159$010
		Juro composto em 4 annos	34$265
			1:314$645
		7.ª no fim do 7.º anno..	159$010
		Juro composto em 3 annos	25$065
			1:498$720
		8.ª no fim do 8.º anno..	159$010
		Juro composto em 2 annos	16$300
			1:674$030
		9.ª no fim do 9.º anno..	159$010
		Juro composto em 1 anno	7$950
			1:840$990
		10.ª no fim do 10.º anno.	159$010
	2:000$000		2:000$000

Esta c/corrente differe só da anterior em os juros de cada annuidade serem calculados durante o tempo $t-1$, $t-2$ ... $t-(t-1)$, em harmonia com a deducção da respectiva formula. Na outra c/corrente o juro é calculado anno a anno.

Digitized by Google

42.° *Um individuo quer contrahir um emprestimo para o reembolsar em 12 annos, e deseja saber á taxa annual de 5 %, o valor d'esse emprestimo nas seguintes condições de pagamento:*

1.° Amortisações annuaes de 1:200$000 réis.
2.° » semestraes de 600$000 réis.
3.° » trimestraes de 300$000 réis.
4.° » mensaes de 100$000 réis.

E' necessario primeiramente determinar qual a taxa semestral, trimestral e mensal equivalente á taxa annual de 5 % (1). Designemos respectivamente por j', j'' e j''' estas taxas.

$$\textit{Taxa semestral. } j' = \sqrt[2]{1{,}05} - 1 = 2{,}46951$$

$$\textit{Taxa trimestral. } j'' = \sqrt[4]{1{,}05} - 1 = 1{,}227222$$

$$\textit{Taxa mensal. } j''' = \sqrt[12]{1{,}05} - 1 = 0{,}40741$$

Appliquemos pois estas differentes taxas á formula (22), para acharmos respectivamente os diversos valores do emprestimo que representaremos por a, a', a'' e a'''.

1.°—Amortisações annuaes de 1:200$000 réis

TAXA — 5 %

$$a = \frac{1{:}200\$000 \times 1{,}05^{12} - 1}{1{,}05^{12} \times 0{,}05} = 10{:}635\$900 \text{ réis}$$

2.°—Amortisações semestraes de 600$000 réis

TAXA — 2,469510 %

$$a' = \frac{600\$000 \times 1{,}0246951^{24} - 1}{1{,}0246951^{24} \times 0{,}0246951} = 10{:}767\$230 \text{ réis}$$

(1) *Calculo Commercial Theorico e Pratico,* por Antonio Carreira e José Francisco Carreira, pag. 32 a 34.

Digitized by Google

3.º — **Amortisações trimestraes de 300$000 réis**

TAXA — 1,227222 %

$$a'' = \frac{300\$000 \times 1{,}01227222^{48} - 1}{1{,}01227222^{48} \times 0{,}01227222} = 10{:}833\$335 \text{ réis}$$

4.º — **Amortisações mensaes de 100$000 réis**

TAXA — 0,40741 %

$$a''' = \frac{100\$000 \times 1{,}0040741^{144} - 1}{1{,}0040741^{144} \times 0{,}0040741} = 10{:}877\$620 \text{ réis}$$

Pelos resultados obtidos se conclue, que, quanto maior fôr a amortisação, menor é o valor do emprestimo, o que é evidente.

43.º *Uma empreza contrahiu em 1 de janeiro de 1901 um emprestimo de 20:000$000 réis, representado por 200 obrigações, reembolsaveis ao par durante 6 annos. O juro annual é de 5$000 réis por obrigação, pago na occasião do sorteio e que se realisa no fim de cada anno. Deseja-se construir o quadro de amortisação e estabelecer a respectiva c/corrente com a empresa.*

Procuremos qual a annuidade a pagar, applicando a formula (23)

$$c = \frac{20{:}000\$000 \times 1{,}05^{6} \times 0{,}05}{1{,}05^{6} - 1}$$

$$c = \frac{1{:}340.095{,}640625}{0{,}340095640625}$$

$$c = 3{:}940\$349{,}3625$$

Como porém, este emprestimo é representado por 200 obrigações de 100$000 réis, só podemos destinar para amortisação, quantias multiplas d'aquella importancia, e portanto, conclue-se que os juros e annuidades só podem ser quantias multiplas de 5$000 réis, como se póde examinar no quadro da pagina seguinte.

Digitized by Google

Annos	Numero de obrigações em divida	Juro no fim de cada anno	Amortisação theorica	Somma disponivel para amortisação	Minimos da amortisação disponivel	Numero de obrigações sorteadas	Annuidades
1901	200	1:000$000	2:940$349.3625	2:940$349,3625	40$349.3625	29	3:900$000
1902	171	855$000	3:085$349,3625	3:127$716,193125	27$716,193125	31	3:955$000
1903	140	700$000	3:240$349,3625	3:269$451,365281	69$451,365281	32	3:900$000
1904	108	540$000	3:400$349 3625	3:473$273,296045	73$273,296045	34	3:940$000
1905	74	370$000	3:570$349,3625	3:647$286,32335	47$286,32335	36	3:970$000
1906	38	190$000	3:750$349,3625	3:800$000	$	38	3:990$000

Digitized by Google

Deve	Empreza		Haver
Importancia do emprestimo	20:000$000	Pagamento das seguintes annuidades:	
Juro composto durante 6 annos a 5 %	6:801$912	1.ª annuidade	3:900$000
		Juro de 5 %	195$000
		2.ª annuidade	3:955$000
			8:050$000
		Juro de 5 %	402$500
		3.ª annuidade	3:900$000
			12:352$500
		Juro de 5 %	617$625
		4.ª annuidade	3:940$000
			16:910$125
		Juro de 5 %	845$505
		5.ª annuidade	3:970$000
			21:725$631
		Juro de 5 %	1:086$281
		6.ª annuidade	3:990$000
	26:801$912		26:801$912

44.° *Um proprietario recebe no dia 20 de novembro de cada anno, a importancia de 1:248$000 réis pelo aluguer de uma casa e desejando transmittir esse direito pelo espaço de 20 annos, precisa saber que quantia poderá levantar á taxa trimestral de 1 ½ %.*

$$a = \frac{312\$000 \times (1{,}015^{80} - 1)}{1{,}015^{80} \times 0{,}015}$$

$$a = \frac{312\$000 \times 2{,}290613}{3{,}290613 \times 0{,}015}$$

$$a = 14:471\$725 \text{ réis}$$

Digitized by Google

Admittindo que o devedor para liquidação do emprestimo a, entrega annualmente ao crédor a annuidade $\mathbf{e}$, vejamos qual a formula a empregar, para conhecermos que quantia a', fica ainda devendo no fim de t annos e quaes as suas deducções.

Deduzamos pois, o valor de a'.

Da seguinte formula

$$a \times (1+j)^t - a' = \frac{\mathbf{e}}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

resulta successivamente

$$a \times j \times (1+j)^t - a' \times j = \mathbf{e} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

$$a \times j \times (1+j)^t = \mathbf{e} \times \left[(1+j)^t - 1\right] + a' \times j$$

$$a \times j \times (1+j)^t - \mathbf{e} \times \left[(1+j)^t - 1\right] = a' \times j$$

$$a' = \frac{a \times j \times (1+j)^t - \mathbf{e} \times \left[(1+j)^t - 1\right]}{j} \qquad (24)$$

que nos permitte achar a quantia em divida depois de t annos.

Se desejarmos saber o valor de a, teremos

$$a \times (1+j)^t - a' = \frac{\mathbf{e}}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

Multiplicando os dois membros por j

$$a \times j \times (1+j)^t - a' \times j = \mathbf{e} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

Digitized by Google

Passando o termo $-a' \times j$, para o 2.º membro, vem

$$a \times j \times (1+j)^t = \mathbf{c} \times \left[(1+j)^t - 1\right] + a' \times j$$

Dividindo os dois membros por $j \times (1+j)^t$, resulta

$$a = \frac{\mathbf{c} \times \left[(1+j)^t - 1\right] + a' \times j}{j \times (1+j)^t} \qquad (25)$$

que nos dá o valor primitivo do emprestimo.

Supponhamos que a incognita é **c**. Da mesma formula

$$a \times (1+j) - a' = \frac{\mathbf{c}}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

tiramos

$$a \times j \times (1+j)^t - a' \times j = \mathbf{c} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

e como j, é factor commum no primeiro membro, vem

$$j \times \left[a \times (1+j)^t - a'\right] = \mathbf{c} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$$

e portanto

$$\mathbf{c} = \frac{j \times \left[a \times (1+j)^t - a'\right]}{(1+j)^t - 1} \qquad (26)$$

formula que determina a importancia annual que o devedor entrega para amortisação da sua divida.

Digitized by Google

Se por ultimo, desejarmos calcular o valor de t, ou seja o tempo, multiplicamos por j, os dois membros da formula

$$a \times (1+j)^t - a' = \frac{\mathfrak{e}}{j} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]$$

e resulta

$$a \times j \times (1+j)^t - a' \times j = \mathfrak{e} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]$$

Effectuando o producto indicado no 2.º membro

$$a \times j \times (1+j)^t - a' \times j = \mathfrak{e} \times (1+j)^t - \mathfrak{e}$$

Dividindo ambos os membros por $(1+j)^t$ e passando o termo $-\mathfrak{e}$, para o 1.º membro

$$a \times j + \frac{\mathfrak{e}}{(1+j)^t} - \frac{a' \times j}{(1+j)^t} = \mathfrak{e}$$

Passando para o 2.º membro o termo $a \times j$.

$$\frac{\mathfrak{e} - a' \times j}{(1+j)^t} = \mathfrak{e} - a \times j$$

Tomando os logarithmos

$$\log. (\mathfrak{e} - a' \times j) - t \times \log. (1+j) = \log. (\mathfrak{e} - a \times j)$$

Mudando o signal a todos os termos e passando para o 2.º membro o termo $-\log. (-\mathfrak{e}\, a' \times j)$

$$t \times \log. (1+j) = \log. (\mathfrak{e} - a' \times j) - \log. (\mathfrak{e} - a \times j)$$

Dividindo os dois membros, por $\log. (1+j)$, resulta finalmente

$$t = \frac{\log. (\mathfrak{e} - a' \times j) - \log. (\mathfrak{e} - a \times j)}{\log. (1+j)} \qquad (27)$$

Digitized by Google

45.° *Tendo o individuo* **B**, *contrahido um emprestimo de 5:000$000 réis, e tendo já pago ao seu crédor duas annuidades de 1:600$000 réis cada, precisa saber quanto tem a entregar no fim do 2.° anno, para completa liquidação da sua divida, suppondo a taxa de 10 %.*

Appliquemos a formula (24)

$$a' = \frac{5{:}000\$000 \times 0{,}1 \times 1{,}1^2 - 1{:}600\$000 \times (1{,}1^2 - 1)}{0{,}1}$$

effectuando as operações, resulta

$$a' = 2{:}690\$000 \text{ réis}$$

Verificação :

Deve **B** **Haver**

Valor do emprestimo	5:000$000	1.ª annuidade.....	1:600$000
Juro composto durante 2 annos á taxa de 10 %.....	1:050$000	*Juro durante 1 anno..*	160$000
		2.ª annuidade.....	1:600$000
			3:360$000
		Saldo em debito no fim do 2.° anno....	2:690$000
	6:050$000		6:050$000

46.° *O individuo* **C**, *levantou um certo emprestimo, e para amortisação, entregou durante 6 annos a annuidade de 1:000$000 réis. No acto do pagamento da ultima annuidade entregou 9:279$235 como liquidação de contas com o seu crédor. Sendo esta operação feita á taxa annual de 5 %, deseja saber a importancia do emprestimo.*

Digitized by Google

Para a resolução d'este problema, substituamos na formula (25) os respectivos valores

$$a = \frac{1{:}000\$000 \times (1{,}05^{6} - 1) + 9{:}279\$235 \times 0{,}05}{0{,}05 \times 1{,}05^{6}}$$

$$a = \frac{340.095{,}64 + 463.961{,}75}{0{,}067004782}$$

$$a = 12{:}000\$000 \text{ réis}$$

Verificação:

Deve	C		Haver
Importancia do emprestimo	12:000$000	1.ª annuidade.....	1:000$000
		Juro	50$000
		2.ª annuidade.....	1:000$000
			3:050$000
Juro accumulado durante 6 annos a 5 %	4:081$147	*Juro*	102$500
		3.ª annuidade.....	1:000$000
			3:152$500
		Juro	157$625
		4.ª annuidade.....	1:000$000
			4:310$125
		Juro	215$506
		5.ª annuidade.....	1:000$000
			5:525$631
		Juro	276$281
		6.ª annuidade.....	1:000$000
			6:801$912
		Importancia entregue pelo devedor.....	9:279$235
	16:081$147		16:081$147

47.° *Foi contrahido um emprestimo de 8:000$000 réis pelo individuo* **D**. *Tendo pago annuidades durante 10 annos e entregando no fim d'este tempo 3:782$150 réis como liquidação da divida, necessita conhecer a importancia da annuidade, sendo a taxa de 6 %.*

Digitized by Google

Empregando a formula (26), vem

$$\mathfrak{c} = \frac{0{,}06 \times (8{:}000\$000 \times 1{,}79084793 - 3{:}782\$150)}{0{,}79084793}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{0{,}06 \times 10{:}544.633{,}44}{0{,}79084793}$$

$$\mathfrak{c} = 800\$000 \text{ réis}$$

Verificação:

Deve		D	Haver
Valor do emprestimo.	8:000$000	1.ª annuidade.	800$000
		Juro	48$000
Juro composto em 10 annos á taxa de 6 %	6:326$783	2.ª annuidade.....	800$000
			1:648$000
		Juro	98$880
		3.ª annuidade.	800$000
			2:546$880
		Juro	152$812
		4.ª annuidade.....	800$000
			3:499$692
		Juro	209$981
		5.ª annuidade.....	800$000
			4:509$673
		Juro.....	270$580
		6.ª annuidade.....	800$000
			5:580$253
		Juro.....	334$815
		7.ª annuidade... ..	800$000
			6:715$068
		Juro..... . .	402$904
		8.ª annuidade.....	800$000
			7:917$972
		Juro.....	475$078
		9.ª annuidade... ..	800$000
			9:193$050
		Juro.....	551$583
		10.ª annuidade.....	800$000
			10:544$633
		Importancia entregue	3:782$150
	14:326$783		14:326$783

Digitized by Google

48.° *Um emprestimo de 6:500$000 réis foi contrahido pelo individuo* **E**, *para pagamento do qual entregou annuidades de 900$000 réis e com a ultima d'estas, a quantia de 2:458$085 réis como liquidação final. Tendo sido feita esta transacção á taxa de 8 %, pede-se o numero das annuidades entregues, ou seja o tempo da duração do emprestimo.*

Empreguemos a formula respectiva

$$t = \frac{\log.\ (900\$000 - 196\$546) - \log.\ (900\$000 - 520\$000)}{\log.\ 1{,}08}$$

$$t = \frac{\log.\ 703\$354 - \log.\ 380\$000}{\log.\ 1{,}08}$$

$$t = \frac{5{,}847173\,98 - 5{,}5797836}{0{,}03342376}$$

$$t = \frac{0{,}26739038}{0{,}03342376}$$

$$t = 8 \text{ annos}$$

Isto significa que o devedor, para saldar as suas contas, entregou 8 annuidades de 900$000 réis e por ultimo a quantia de 2:458$085 réis, prefazendo com os respectivos juros uma totalidade de 12:031$046 réis, como se póde examinar pela c/corrente que segue

Digitized by Google

Deve		E	Haver
Importancia do emprestimo	6:500$000	1.ª annuidade.....	900$000
		Juro.....	72$000
		2.ª annuidade..	900$000
Juro composto em 8 annos á taxa de 8 %	5:531$046		1:872$000
		Juro.....	149$760
		3.ª annuidade.....	900$000
			2:921$760
		Juro.....	233$740
		4.ª annuidade.....	900$000
			4:055$500
		Juro...	324$440
		5.ª annuidade.....	900$000
			5:279$940
		Juro.....	422$395
		6.ª annuidade.....	900$000
			6:602$335
		Juro.....	528$186
		7.ª annuidade.....	900$000
			8:030$521
		Juro.....	642$440
		8.ª annuidade.....	900$000
			9:572$961
		Saldo entregue.....	2:458$085
	12:031$046		12:031$046

49.º *Um capitalista emprestou a* **F.** *a importancia de 15:000$000 réis á taxa de 10 % e que se convencionou ser paga em annuidades de 3:000$000 réis. Depois do recebimento de 8 annuidades, deseja saber se as contas estão liquidadas, e no caso haver saldo, se é positivo ou negativo.*

Digitized by Google

Para a resolução d'este caso, empregaremos a formula (24)

$$a' = \frac{15{:}000\$000 \times 0{,}1 \times 2{,}14358881 - 3{:}000\$000 \times 1{,}14358881}{0{,}1}$$

$$a' = \frac{3{:}215.383{,}215 - 3.430{:}766{,}430}{0{,}1}$$

$$a' = \frac{-\ 215.383{,}215}{0{,}1}$$

$$a' = -\ 2{:}153\$832 \text{ réis}$$

O saldo para o capitalista é pois negativo, quer dizer, o individuo **F** é crédor de 2:153$832 réis, por ter entregue aquella quantia a mais ao capitalista.

Verificação:

Deve **F** **Haver**

Importancia recebida.	15:000$000	1.ª annuidade.....	3:000$000
		Juro.....	300$000
Juro composto durante 8 annos á taxa de 10 %.....		2.ª annuidade.....	3:000$000
	17:153$833		6:300$000
		Juro.....	630$000
	32:153$833	3.ª annuidade.....	3:000$000
Saldo a s/favor	2:153$832		9:930$000
		Juro.....	993$000
		4.ª annuidade.....	3:000$000
			13:923$000
		Juro.....	1:392$300
		5.ª annuidade.....	3:000$000
			18:315$300
		Juro.....	1:831$530
		6.ª annuidade.....	3:000$000
			23:146$830
		Juro.....	2:314$683
		7.ª annuidade.....	3:000$000
			28:461$513
		Juro.	2:846$152
		8.ª annuidade... ...	3:000$000
	34:307$665		34:307$665

Digitized by Google

TABELLAS

PARA OS CALCULOS

DE

PRESTAÇÕES A JUROS COMPOSTOS

E

ANNUIDADES

Digitized by Google

Digitized by Google

TABELLA I

Capitalisação de 1 real no fim de t annos á juro composto, entregue no principio de cada anno

Tabella construida com a applicação da formula $C = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$ *na qual se considera* $c = 1$, *e portanto* $C = \frac{1+j}{j} \times \left[(1+j)^t - 1\right]$ (1)

ANNOS	TAXAS				
	3 1/2	4	4 1/2	5	6
1	1,035 000	1,040 000	1,045 000	1,050 000	1,060 000
2	2,106 225	2,121 600	2,137 025	2,152 500	2,183 600
3	3,214 943	3,246 464	3,278 191	3,310 125	3,374 616
4	4,362 466	4,416 323	4,470 710	4,525 631	4,637 094
5	5,550 152	5,632 975	5,716 892	5,801 913	5,975 308
6	6,779 408	6,898 294	7,019 152	7,142 008	7,393 835
7	8,051 687	8,214 226	8,380 014	8,549 109	8,897 463
8	9,368 496	9,582 795	9,802 114	10,026 564	10,491 315
9	10,731 393	11,006 107	11,288 209	11,577 893	12,180 796
10	12,141 992	12,486 351	12,841 179	13,206 787	13,971 648
11	13,601 961	14,025 805	14,464 032	14,917 127	15,869 932
12	15,113 030	15,626 838	16,159 913	16,712 983	17,882 130
13	16,676 986	17,291 911	17,932 109	18,598 632	20,015 062
14	18,295 681	19,023 588	19,784 054	20,578 564	22,275 971
15	19,971 030	20,824 531	21,719 337	22,657 492	24,672 525
16	21,705 016	22,697 612	23,741 707	24,840 366	27,212 886
17	23,499 691	24,645 413	25,855 084	27,132 385	29,905 657
18	25,357 180	26,671 229	28,063 562	29,539 004	32,759 990
19	27,279 682	28,778 079	30,371 423	32,065 954	35,785 583
20	29,269 471	30,969 202	32,783 137	34,719 252	38,992 719
21	31,328 902	33,247 698	35,303 378	37,505 214	42,392 280
22	33,460 414	35,617 889	37,937 030	40,430 475	45,995 821
23	35,666 528	38,082 604	40,689 196	43,501 999	49,815 584
24	37,949 857	40,645 908	43,565 210	46,727 099	53,864 519
25	40,313 102	43,311 745	46,570 645	50,113 454	58,156 389
26	42,759 060	46,084 214	49,711 324	53,669 126	62,705 767
27	45,290 627	48,967 583	52,993 333	57,402 583	67,528 114
28	47,910 799	51,966 286	56,423 033	61,322 712	72,639 805
29	50,622 677	55,084 938	60,007 070	65,438 847	78,058 189
30	53,429 471	58,328 335	63,752 388	69,760 790	83,801 676
31	56,334 502	61,701 469	67,666 245	74,298 829	89,889 786
32	59,341 210	65,209 527	71,756 226	79,063 771	96,343 172
33	62,453 152	68,857 909	76,030 256	84,066 959	103,183 759

(1) Para calcular por exemplo a somma produzida no fim de 20 annos, pela prestação de 1 real e seus juros compostos á taxa de 4,5 %, teremos

Digitized by Google

Problemas para exemplificação da tabella I

50.º *Qual é a somma produzida, no fim de 28 annos, por uma prestação annual de 200$000 réis á taxa de 4 %?*

O numero 51,966286 da tabella, que corresponde a 28 annos e a 4 %, representa como sabemos a somma produzida por 1 real no fim d'aquelle tempo.

Por conseguinte

$$C = 200\$000 \times 51{,}966286$$

$$C = 10{:}393\$260 \text{ réis}$$

51.º *Entregando-se 24 prestações annuaes de 120$000 réis, deseja-se saber á taxa de 6 %, o valor adquirido no fim d'aquelle tempo.*

Como no caso precedente

$$C = 120\$000 \times 53{,}864519$$

$$C = 6{:}463\$742 \text{ réis}$$

52.º *Tendo-se comprado uma propriedade por 500$000 réis, a pagar em 5 prestações annuaes de 100$000 réis, precisa-se conhecer o valor adquirido por aquellas prestações á taxa de 6 %.*

Da mesma fórma

$$C = 100\$000 \times 5{,}975308$$

$$C = 597\$530$$

resultado obtido no problema 16.º

$$C = \frac{1{,}045}{0{,}045} \times (1{,}045^{20} - 1) = 32{,}783137$$

que é precisamente a quantidade que se encontra na columna correspondente.

Digitized by Google

TABELLA II

Prestação a entregar no principio de cada anno para se obter o capital de 1 real

Tabella construida com a applicação da formula $c = \frac{Cj}{(1+j)\times\left[(1+j)^t - 1\right]}$ *na qual se suppõe* $C = 1$, *e portanto* $c = \frac{j}{(1+j)\times\left[(1+j)^t - 1\right]}$ (1)

ANNOS	TAXAS				
	2	3	4	5	6
1	0,980 39	0,970 87	0,961 54	0,952 38	0.943 40
2	0,485 34	0,478 26	0,471 34	0,464 58	0,457 96
3	0,320 35	0,314 11	0,308 03	0,302 10	0,296 33
4	0,237 87	0,232 07	0,226 43	0,220 96	0,215 65
5	0,188 39	0,182 87	0,177 53	0,172 36	0,167 36
6	0,155 42	0,150 10	0,144 96	0,140 02	0,135 25
7	0,131 85	0,126 71	0,121 74	0,116 97	0,112 39
8	0,114 23	0,109 18	0,104 35	0,099 74	0.095 32
9	0,100 51	0,095 57	0,090 86	0,086 37	0,082 10
10	0,089 54	0,084 69	0,080 09	0,075 72	0,071 57
11	0,080 57	0,075 80	0,071 30	0,067 04	0,063 01
12	0,073 10	0,068 41	0,063 99	0,059 83	0.055 92
13	0,066 78	0,062 17	0,057 83	0,053 77	0,049 96
14	0,061 37	0,056 82	0,052 57	0,048 59	0,044 89
15	0,056 69	0,052 20	0,048 02	0,044 14	0,040 53
16	0,052 60	0,048 17	0 044 06	0,040 26	0,036 75
17	0,048 99	0,044 61	0 040 58	0,036 86	0,033 44
18	0,045 79	0,041 47	0,037 49	0 033 85	0,030 53
19	0,042 92	0,038 65	0,034 75	0,031 19	0,027 94
20	0,040 35	0,036 13	0,032 29	0,028 80	0,025 65
21	0,038 02	0,033 86	0,030 08	0,026 66	0,023 59
22	0,035 91	0,031 79	0,028 08	0,024 73	0,021 74
23	0,033 99	0,029 92	0,027 31	0,022 99	0,020 07
24	0,032 23	0,028 20	0,024 60	0,021 40	0,018 57
25	0,030 61	0,026 63	0,023 09	0,019 90	0,017 20

(1) Para achar a prestação que se deve collocar á taxa de 6 % durante 8 annos, afim de se obter o capital de 1 real, teremos

$$c = \frac{0{,}06}{1{,}06\times(1{,}06^8 - 1)} = 0{,}09532$$

valor este, que se encontra na columna respectiva.

Digitized by Google

ANNOS	TAXAS				
	2	3	4	5	6
26	0,029 12	0,025 18	0,021 70	0,018 63	0,015 95
27	0,027 74	0,023 85	0,020 42	0,017 52	0,014 81
28	0,026 46	0,022 62	0,019 24	0,016 21	0,013 77
29	0,025 27	0,021 47	0,018 15	0,015 28	0,012 81
30	0,024 47	0,020 41	0,017 14	0,014 34	0,011 93
31	0,023 13	0,020 00	0,016 21	0,013 46	0,011 13
32	0,022 17	0,019 05	0,015 34	0,012 65	0,010 38
33	0,021 26	0,017 03	0,014 52	0,011 90	0,009 69
34	0,020 41	0,016 62	0,013 76	0,011 20	0,009 06
35	0,019 61	0,016 86	0,013 06	0,010 54	0,008 47
36	0,018 86	0,015 34	0,012 39	0,009 94	0,007 92
37	0,018 14	0,014 67	0,011 77	0,009 37	0,007 41
38	0,017 47	0,014 04	0,011 18	0,008 84	0,006 94
39	0,016 83	0,013 44	0,010 64	0,008 35	0,006 50
40	0,016 23	0,012 88	0,010 12	0,007 88	0,006 10
41	0,015 66	0,012 34	0,009 63	0,007 45	0,005 72
42	0,015 12	0,011 84	0,009 17	0,007 04	0,005 36
43	0,014 60	0,011 70	0,008 74	0,006 66	0,005 03
44	0,014 11	0,010 90	0,008 33	0,006 30	0,004 72
45	0,013 64	0,010 47	0,007 95	0,005 96	0,004 43
46	0,013 19	0,010 06	0,007 58	0,005 65	0,004 17
47	0,012 77	0,009 67	0,007 23	0,005 35	0,003 91
48	0,012 36	0,009 30	0,006 90	0,005 07	0,003 68
49	0,011 97	0,008 95	0,006 59	0,004 80	0,003 46
50	0,011 59	0,008 61	0,006 30	0,004 55	0,003 25

Problemas para exemplificação da tabella II

53.° *Desejando receber-se no fim de 10 annos um capital de 2:641$310 réis, necessita-se saber que prestação annual se tem que entregar no principio de cada anno, suppondo a taxa 5 %*

No ponto de encontro da linha horisontal do tempo, com a linha vertical da taxa, lê-se o numero 0,07572, com o qual estabelecemos a seguinte proporção:

$$1 : 0{,}07572 :: 2{:}641\$310 : c$$

e

$$c = 2{:}641\$310 \times 0{,}07572 = 200\$000 \text{ réis}$$

Digitized by Google

54.° *Que prestação annual é preciso entregar á taxa de 4 %, para no fim de 20 annos se obter uma somma de 20:000$000 réis?*

A prestação para se obter 1 real é 0,03229, logo

$$c = 20{:}000\$000 \times 0{,}03229 = 645\$800 \text{ réis}$$

Com o auxilio d'esta tabella podemos ainda procurar o valor do tempo e da taxa.

55.° *Obtendo-se com prestações de 100$000 réis e á taxa de 2 %, um capital de 8:627$096 réis, pergunta-se durante quantos annos se entregou aquellas prestações.*

Dividimos a prestação pelo capital, e achamos para prestação de 1 real 0,01159.

Procurando este numero na columna vertical de 2 %, encontramol-o na linha dos 50 annos, que é o tempo pedido.

56.° *Com prestações annuaes de 435$760 réis, retirou-se á taxa de 5 %, a quantia de 6:500$000 réis. Quantas prestações se entregaram?*

A prestação para 1 real é 0,06704, fracção correspondente a 11 annos e que representa o numero das prestações entregues.

57.° *Entregando-se durante 8 annos a prestação de 400$000 réis, e recebendo-se no fim d'aquelle tempo a quantia de 4:010$625 réis, precisa-se saber a taxa do juro.*

Como no caso anterior, procuramos a prestação de 1 real, que é 0,09974.

Procurando este numero na linha horisontal do tempo dado, observamos que a taxa desconhecida é 5 %.

58.° *Prestações annuaes de 240$000 réis, produziram em 20 annos 6:642$353 réis. Qual a taxa?*

$$c = \frac{240\$000}{6{:}642\$353} = 0{,}03613$$

Corresponde na tabella á taxa de 3 %.

Digitized by Google

TABELLA III

Valor actual da capitalisação de 1 real no fim de *t* annos a juro composto, entregue no principio de cada anno

Tabella construida com a applicação da formula $v = c \times \frac{1+j}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t}\right]$ *na qual se considera* $c = 1$, *e portanto* $v = \frac{1+j}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t}\right]$ (1)

ANNOS	TAXAS			
	3 1/2	4	4 1/2	5
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	1,965 184	1,961 538	1,956 938	1.952 381
3	2,899 694	2 886 095	2,872 668	2,859 410
4	3.801 637	3,775 091	3,748 964	3,723 248
5	4,673 079	4,629 895	4,587 526	4,546 950
6	5,515 052	5,451 822	5,389 975	5,329 477
7	6,328 553	6,242 137	6.157 872	6.075 692
8	7,114 544	7,002 055	6,892 701	6,786 373
9	7,873 955	7,732 745	7,595 886	7.463 213
10	8,607 686	8,435 332	8,268 792	8,107 822
11	9.316 605	9,110 896	8.912 718	8,721 735
12	10,001 551	9,760 477	9,528 917	9,306 414
13	10,663 334	10,385 074	10,118 581	9,863 252
14	11.302 738	10,985 648	10,682 852	10,393 573
15	11,920 520	11,563 123	11,222 825	10,898 641
16	12,517 411	12,118 387	11,739 546	11,379 658
17	13,094 117	12,652 296	12,234 015	11,837 770
18	13,651 321	13,165 669	12,707 191	12,274 066
19	14,189 682	13,659 297	13,159 992	12,689 587
20	14.709 837	14,133 939	13,593 269	13,085 321
21	15,212 403	14,590 326	14,007 936	13,462 210
22	15,697 974	15,029 160	14,404 724	13,821 153
23	16,167 125	15,451 115	14,784 425	14,163 003
24	16,620 310	15,856 842	15 147 775	14,488 574
25	17,058 368	16,246 963	15,495 478	14,798 642
26	17,481 515	16,622 080	15.828 209	15,093 945
27	17,890 352	16.982 769	16,146 611	15,375 185
28	18,285 354	17,329 586	16,451 303	15,643 034
29	18,667 019	17,662 263	16,742 874	15.898 127
30	19,035 767	17,983 715	17,021 889	16,141 074
31	19,392 045	18,292 033	17.288 889	16,372 451
32	19,736 276	18,588 494	17,544 391	16,592 810
33	20,078 865	18,873 521	17,788 891	16.802 677

(1) Para conhecer o valor actual da capitalisação de 1 real durante 4 annos a taxa de 5 %, teremos

Digitized by Google

Problemas para a exemplificação da tabella III

59.° *Qual é o valor actual da somma produzida por 10 prestações annuaes de 250$000 réis á taxa de 4 1/2 0/0?*

O numero 8,268792 da tabella, correspondente a 10 annos e a 4 1/2 0/0 é o valor actual da somma produzida por 10 prestações de 1 real. Multiplicando portanto aquelle numero por 250$000 réis, resulta 2:067$198 réis que é a somma pedida.

Isto significa que, se em logar de collocar successivamente 10 prestações de 250$000 réis, se entregar de uma só vez 2:067$198 réis a render juros compostos á taxa de 4 1/2, obteremos no fim dos 10 annos, um capital de 3:210$295 réis, que é precisamente egual ao que produziria as prestações de 250$000 réis, entregues durante 10 annos e no principio de cada um d'elles.

60.° *Durante 19 annos entregou-se prestações de réis 240$000, á taxa annual de 3 1/2 0/0. Pergunta-se que capital seria necessario entregar d'uma só vez, para no fim dos 19 annos, produzir uma somma egual á capitalisação d'aquellas prestações.*

Evidentemente, o valor actual, d'esta capitalisação deve ser menor que o producto do tempo pela prestação, por isso que, o juro do valor actual, entregue no principio do primeiro anno é superior ao das prestações.

Determinemos pois, com o auxilio da tabella esse valor actual. Percorrendo a linha vertical dos 3 1/2 0/0 até aos

---

$$v = \frac{1{,}05}{0{,}05} \times \left(1 - \frac{1}{1{,}05^4}\right) = 3{,}723248$$

quantidade que se encontra no crusamento da taxa e tempo apresentado.

Digitized by Google

19 annos, encontramos o valor actual de 19 prestações de 1 real, que é 14,189682. Portanto

$$v = 14{,}189682 \times 240\$000$$

$$v = 3{:}405\$523 \text{ réis}$$

Recorrendo á tabella I para acharmos a somma produzida pelas 19 prestações de 240$000 réis, tiramos

$$C = 240\$000 \times 27{,}279682$$

$$C = 6{:}547\$123 \text{ réis}$$

Importancia que encontramos applicando o valor actual á formula de juros compostos

$$C = 3{:}405\$523 \times 1{,}035^{19}$$

$$C = 6{:}547\$123 \text{ réis}$$

61.º *Effectuando-se a venda d'umas mercadorias por 4:800$000 réis, a pagar em 8 prestações, sendo a primeira paga na occasião da venda e as restantes em sete letras com o vencimento de 1 a 7 annos, pergunta-se qual seria á taxa de 5 % a somma que o comprador tinha a dispender se quizesse liquidar no acto da transacção.*

Pelo mesmo processo

$$v = 6{,}786373 \times 600\$000 = 4{:}071\$823$$

Effectivamente

$$4{:}071\$823 \times 1{,}05^{8} = 6{:}015\$938 \text{ réis}$$

somma que produziriam as prestações de 600$000 réis entregues durante os 8 annos.

Digitized by Google

TABELLA IV

Somma produzida pela annuidade de 1 real no fim de *t* annos a juro composto entregue no fim de cada anno

Tabella construida com a applicação da formula

$C = \frac{c}{j} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]$ *na qual se considera* $c = 1$, *e portanto*

$C = \frac{1}{j} \times \left[(1+j)^t - 1 \right]$ (1)

ANNOS	TAXAS			
	3 1/2	4	4 1/2	5
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	2,035 000	2,040 000	2,045 000	2,050 000
3	3,106 225	3,121 600	3,137 025	3,152 500
4	4,214 943	4,246 464	4,278 191	4,310 125
5	5,362 466	5,416 323	5,470 710	5,525 631
6	6,550 152	6,632 975	6,716 892	6,801 913
7	7,779 408	7,898 294	8,019 152	8,142 008
8	9,051 687	9,214 226	9,380 014	9,549 109
9	10,368 496	10,582 795	10,802 114	11,026 564
10	11,731 393	12,006 107	12,288 209	12,577 893
11	13,141 992	13,486 351	13,841 179	14,206 787
12	14,601 962	15,025 805	15,464 032	15,917 127
13	16,113 030	16,626 838	17,159 913	17,712 983
14	17,676 986	18,291 911	18,932 109	19,598 632
15	19,295 681	20,023 588	20,784 054	21,578 564
16	20,971 030	21,824 531	22,719 337	23,657 492
17	22,705 016	23,697 512	24,741 707	25,840 366
18	24,499 691	25,645 413	26,855 084	28,132 385
19	26,357 180	27,671 229	29,063 562	30,539 004
20	28,279 682	29,778 079	31,371 423	33,065 954
21	30,269 471	31,969 202	33,783 137	35,719 252
22	32,328 902	34,247 970	36,303 378	38,505 214
23	34,460 414	36,617 889	38,937 030	41,430 475
24	36,666 528	39,082 604	41,689 196	44,501 999
25	38,949 857	41,645 908	44,565 210	47,727 099
26	41,313 102	44,311 745	47,570 645	51,113 454
27	43,759 060	47,084 214	50,711 324	54,669 126
28	46,290 627	49,967 583	53,993 333	58,402 583
29	48,910 799	52,966 286	57,423 033	62,322 712
30	51,622 677	56,084 938	61,007 070	66,438 848
31	54,429 471	59,328 335	64,782 388	70,760 790
32	57,334 502	62,701 469	68,666 245	75,298 829
33	60,341 210	66,209 527	72,756 226	80,063 771

(1) Para se calcular a somma produzida no fim de 15 annos, pela annuidade de 1 real, com os seus juros compostos a taxa de 3 1/2 %, teremos

Digitized by Google

Problemas para exemplificação da tabella IV

62.º *Qual é a somma produzida por 25 annuidades de 750$000 réis á taxa de 5 %?*

O numero correspondente á taxa e tempo apresentado representa a somma produzida pela annuidade de 1 real. Portanto

$$C = 750\$000 \times 47{,}727099$$

$$C = 35{:}795\$325 \text{ réis}$$

63.º *Que capital se amortisa com o pagamento de 18 annuidades de 360$000 réis á taxa de 4 %?*

Como no caso anterior

$$C = 360\$000 \times 25{,}645413$$

$$C = 9{:}232\$348 \text{ réis}$$

64.º *Entregando-se durante 16 annos, annuidades de réis 476$848, deseja-se conhecer a somma produzida á taxa de 3 ½ %.*

O capital de 1 real em 16 annos e a 3 ½ %, produz 20,97103, logo

$$C = 476\$848 \times 20{,}97103$$

$$C = 10{:}000\$000 \text{ réis}$$

$$C = \frac{1}{0{,}035} \times (1{,}035^{15} - 1) = 19{,}295681$$

que é exactamente o numero que se encontra na tabella.

Digitized by Google

TABELLA V

Annuidade a entregar no fim de cada anno, para amortisar ou extinguir a divida de 1 real

Tabella construida com a applicação da formula

$$c = \frac{a \times (1+j)^t \times j}{(1+j)^t - 1}$$ *na qual se suppõe* $a = 1$, *e portanto*

$$c = \frac{(1+j)^t \times j}{(1+j)^t - 1}$$

Digitized by Google

TA

ANNOS	1	2	3	4	4 1/2
1	1,010000 00	1,020000 00	1,030000 00	1,040000 00	1,045000 00
2	0,507512 44	0,515049 50	0,522610 84	0,530196 08	0,533997 56
3	0,340022 11	0,346754 67	0,353530 36	0,360348 54	0,363773 36
4	0,256281 09	0,262623 75	0,269027 05	0,275490 05	0,278743 65
5	0,206039 80	0,212158 39	0,218354 57	0,224627 11	0,227791 64
6	0,172548 37	0,178525 81	0,184597 50	0,190761 90	0,193878 39
7	0,148628 28	0,154511 95	0,160506 35	0,166609 61	0,169701 47
8	0,130690 29	0,136509 80	0,142456 39	0,148527 83	0,151609 65
9	0,116740 37	0,122515 44	0,128433 86	0,134492 99	0,137574 47
10	0,105582 08	0,111326 53	0,117230 51	0,123290 94	0,126378 82
11	0,096454 08	0,102177 94	0,108077 45	0,114149 04	0,117248 18
12	0,088848 79	0,094559 60	0,100462 09	0,106552 17	0,109666 19
13	0,082414 82	0,088118 35	0,094029 54	0,100143 73	0,103275 35
14	0,076901 17	0,082601 97	0,088526 34	0,094668 97	0,097820 32
15	0,072123 78	0,077825 47	0,083766 58	0,089941 10	0,093113 81
16	0,067944 60	0,073650 13	0,079610 85	0,085820 00	0,089015 37
17	0,064258 06	0,069969 84	0,075952 53	0,082198 52	0,085417 58
18	0,060982 05	0,066702 10	0,072708 70	0,078993 33	0,082236 90
19	0,058051 75	0,063781 77	0,069813 88	0,076138 62	0,079407 34
20	0,055415 32	0,061156 72	0,067215 71	0,073581 75	0,076876 14
21	0,053030 75	0,058784 77	0,064871 78	0,071280 11	0,074600 57
22	0,050863 71	0,056631 40	0,062747 39	0,069198 81	0,072545 65
23	0,048885 84	0,054668 10	0,060813 90	0,067309 06	0,070682 49
24	0,047073 47	0,052871 10	0,059047 42	0,065586 83	0,068987 03
25	0,045406 75	0,051220 44	0,057427 87	0,064011 96	0,067439 03
26	0,043868 88	0,049699 23	0,055938 29	0,062567 38	0,066021 37
27	0,042445 53	0,048293 09	0,054564 21	0,061238 54	0,064719 46
28	0,041124 44	0,046989 67	0,053293 23	0,060012 98	0,063520 81
29	0,039895 02	0,045778 35	0,052114 67	0,058879 93	0,062414 61
30	0,038748 11	0,044649 92	0,051019 26	0,057830 10	0,061391 54
31	0,037675 73	0,043596 35	0,049998 93	0,056855 35	0,060443 45
32	0,036670 89	0,042610 61	0,049046 62	0,055948 59	0,059563 20
33	0,035727 44	0,041686 53	0,048156 12	0,055103 57	0,058744 53
34	0,034839 97	0,040818 67	0,047321 96	0,054314 77	0,057981 91
35	0,034003 68	0,040002 21	0,046539 29	0,053577 32	0,057270 45
36	0,033214 31	0,039232 85	0,045803 79	0,052886 88	0,056605 78
37	0,032468 05	0,038506 78	0,045111 62	0,052239 56	0,055984 02
38	0,031761 50	0,037820 57	0,044459 34	0,051631 92	0,055401 69
39	0,031091 60	0,037171 14	0,043843 85	0,051060 83	0,054855 67
40	0,030455 60	0,036555 75	0,043262 38	0,050523 49	0,054343 15
41	0,029851 02	0,035971 88	0,042712 41	0,050017 38	0,053861 58
42	0,029275 63	0,035417 29	0,042191 68	0,049540 20	0,053408 68
43	0,028727 37	0,034889 93	0,041698 11	0,049089 89	0,052982 35
44	0,028204 41	0,034387 94	0,041229 85	0,048664 54	0,052580 71
45	0,027705 05	0,033909 62	0,040785 18	0,048262 46	0,052202 02
46	0,027227 75	0,033453 42	0,040362 54	0,047882 05	0,051844 71
47	0,026771 11	0,033017 92	0,039960 51	0,047521 89	0,051507 34
48	0,026333 84	0,032601 84	0,039577 77	0,047180 65	0,051188 58
49	0,025914 74	0,032203 96	0,039213 14	0,046857 12	0,050887 22
50	0,025512 73	0,031823 21	0,038865 50	0,046550 20	0,050602 15

Digitized by Google

XAS

5	6	7	8	10	ANNOS
1,050000 00	1,060000 00	1,070000 00	1,080000 00	1,100000 00	1
0,537804 88	0,545436 89	0,553091 79	0,560769 23	0,576190 48	2
0,367208 56	0,374109 81	0,381051 66	0,388033 51	0,402114 80	3
0,282011 83	0,288591 49	0,295228 12	0,301920 80	0,315470 80	4
0,230974 80	0,237396 40	0,243890 69	0,250456 45	0,263797 48	5
0,197017 47	0,203362 63	0,209795 80	0,216315 39	0,229607 38	6
0,172819 82	0,179135 02	0,185553 22	0,192072 40	0,205405 50	7
0,154721 81	0,161035 94	0,167467 76	0,174014 76	0,187444 02	8
0,140690 08	0,147022 24	0,153486 47	0,160079 71	0,173640 54	9
0,129504 58	0,135867 96	0,142377 50	0,149029 49	0,162745 40	10
0,120388 89	0,126792 94	0,133356 90	0,140076 34	0,153963 14	11
0,112825 41	0,119277 03	0,125901 99	0,132695 02	0,146763 32	12
0,106455 77	0,112960 11	0,119650 85	0,126521 81	0,140778 52	13
0,101023 97	0,107584 91	0,114344 94	0,121296 85	0,135746 22	14
0,096342 29	0,102962 76	0,109794 62	0,116829 54	0,131473 78	15
0,092269 91	0,098952 14	0,105857 65	0,112976 87	0,127816 62	16
0,088699 14	0,095444 80	0,102425 19	0,109629 43	0,124664 13	17
0,085546 22	0,092356 54	0,099412 60	0,106702 10	0,121930 22	18
0,082745 01	0,089620 86	0,096753 02	0,104127 63	0,119546 87	19
0,080242 59	0,087184 56	0,094392 93	0,101852 21	0,117459 62	20
0,077996 11	0,085004 55	0,092289 00	0,099832 25	0,115624 39	21
0,075970 51	0,083045 57	0,090405 77	0,098032 07	0,114005 06	22
0,074136 83	0,081278 48	0,088713 93	0,096422 17	0,112571 81	23
0,072470 90	0,079679 01	0,087189 02	0,094977 96	0,111299 78	24
0,070952 46	0,078226 72	0,085810 52	0,093678 78	0,110168 07	25
0,069564 34	0,076904 35	0,084561 03	0,092507 13	0,109159 04	26
0,068291 86	0,075697 17	0,083425 73	0,091448 10	0,108257 64	27
0,067122 53	0,074592 55	0,082391 93	0,090488 90	0,107451 01	28
0,066045 51	0,073579 61	0,081448 65	0,089618 54	0,106728 07	29
0,065051 44	0,072648 91	0,080586 40	0,088827 43	0,106079 25	30
0,064132 12	0,071792 22	0,079796 91	0,088107 28	0,105496 21	31
0,063280 42	0,071002 34	0,079072 92	0,087450 81	0,104971 72	32
0,062490 04	0,070272 93	0,078408 07	0,086851 63	0,104499 41	33
0,061755 43	0,069598 43	0,077796 74	0,086304 11	0,104073 71	34
0,061071 71	0,068973 86	0,077233 96	0,085803 26	0,103689 71	35
0,060434 46	0,068394 83	0,076715 31	0,085344 67	0,103343 06	36
0,059839 79	0,067857 43	0,076236 85	0,084924 40	0,103029 94	37
0,059284 23	0,067358 12	0,075795 05	0,084538 94	0,102746 92	38
0,058764 62	0,066893 80	0,075386 76	0,084185 13	0,102490 98	39
0,058278 16	0,066461 54	0,075009 14	0,083860 16	0,102259 41	40
0,057822 29	0,066058 86	0,074659 62	0,083561 49	0,102049 80	41
0,057394 71	0,065683 42	0,074335 91	0,083286 80	0,101859 99	42
0,056993 33	0,065333 12	0,074035 90	0,083034 14	0,101688 05	43
0,056616 25	0,065006 06	0,073757 69	0,082801 52	0,101532 24	44
0,056261 73	0,064700 50	0,073499 57	0,082587 28	0,101391 00	45
0,055928 20	0,064414 85	0,073259 96	0,082389 91	0,101262 95	46
0,055614 21	0,064147 68	0,073037 44	0,082207 99	0,101146 82	47
0,055318 43	0,063897 66	0,072830 70	0,082040 27	0,101041 48	48
0,055039 65	0,063663 56	0,072638 53	0,081885 57	0,100945 90	49
0,054776 74	0,063444 29	0,072459 85	0,081742 86	0,100859 17	50

Digitized by Google

TA

ANNOS	1	2	3	4	4 1/2
51	0,025126 80	0,031458 56	0,038533 82	0,046258 85	0,050332 32
52	0,024756 03	0,031109 09	0,038217 18	0,045982 12	0,050076 79
53	0,024399 56	0,030773 92	0,037914 71	0,045719 15	0,049834 69
54	0,024056 58	0,030452 26	0,037625 58	0,045469 10	0,049605 19
55	0,023726 37	0,030143 37	0,037349 07	0,045231 24	0,049387 54
56	0,023408 23	0,029846 57	0,037084 47	0,045004 87	0,049181 05
57	0,023101 56	0,029561 20	0,036831 14	0,044789 32	0,048985 06
58	0,022805 73	0,029286 67	0,036588 48	0,044584 01	0,048798 97
59	0,022520 20	0,029022 43	0,036355 93	0,044388 36	0,048622 21
60	0,022244 45	0,028767 97	0,036132 96	0,044201 85	0,048454 26
61	0,021978 00	0,028522 78	0,035919 08	0,044023 98	0,048294 62
62	0,021720 41	0,028286 43	0,035713 85	0,043854 30	0,048142 84
63	0,021471 25	0,028058 48	0,035516 82	0,043692 37	0,047998 48
64	0,021230 13	0,027838 55	0,035327 60	0,043537 80	0,047861 15
65	0,020996 67	0,027626 24	0,035145 81	0,043390 19	0,047730 47
66	0,020770 52	0,027421 22	0,034971 10	0,043249 21	0,047606 08
67	0,020551 36	0,027223 16	0,034803 13	0,043114 51	0,047487 65
68	0,020338 88	0,027031 73	0,034641 59	0,042985 78	0,047374 87
69	0,020132 80	0,026846 65	0,034486 18	0,042862 72	0,047267 45
70	0,019932 82	0,026667 65	0,034336 63	0,042745 06	0,047165 11
71	0,019738 70	0,026494 46	0,034192 66	0,042632 53	0,047067 60
72	0,019550 19	0,026326 83	0,034054 04	0,042524 89	0,046974 65
73	0,019367 06	0,026164 54	0,033920 53	0,042421 90	0,046886 05
74	0,019189 10	0,026007 36	0,033791 91	0,042323 34	0,046801 59
75	0,019016 09	0,025855 08	0,033667 96	0,042229 00	0,046721 04
76	0,018847 84	0,025707 51	0,033548 49	0,042138 68	0,046644 22
77	0,018684 10	0,025564 47	0,033433 31	0,042052 21	0,046570 94
78	0,018524 88	0,025425 76	0,033322 24	0,041969 39	0,046501 04
79	0,018369 84	0,025291 23	0,033215 10	0,041890 07	0,046434 34
80	0,018218 85	0,025160 71	0,033111 75	0,041814 08	0,046370 69
81	0,018071 80	0,025034 05	0,033012 01	0,041741 27	0,046309 95
82	0,017928 51	0,024911 10	0,032915 76	0,041671 50	0,046251 97
83	0,017788 86	0,024791 73	0,032822 84	0,041604 63	0,046196 62
84	0,017652 73	0,024675 81	0,032733 13	0,041540 54	0,046143 79
85	0,017519 98	0,024563 21	0,032646 50	0,041479 09	0,046093 34
86	0,017390 50	0,024453 81	0,032562 84	0,041420 18	0,046045 16
87	0,017264 17	0,024347 50	0,032482 02	0,041363 70	0,045999 15
88	0,017140 89	0,024244 16	0,032403 93	0,041309 53	0,045955 22
89	0,017020 56	0,024143 70	0,032328 48	0,041257 58	0,045913 25
90	0,016903 06	0,024046 02	0,032255 56	0,041207 75	0,045873 16
91	0,016788 32	0,023951 01	0,032185 08	0,041159 95	0,045834 86
92	0,016676 24	0,023858 59	0,032116 95	0,041114 10	0,045798 27
93	0,016566 73	0,023768 68	0,032051 07	0,041070 10	0,045763 31
94	0,016459 71	0,023681 18	0,031987 37	0,041027 89	0,045729 91
95	0,016355 11	0,023596 02	0,031925 77	0,040987 38	0,045697 99
96	0,016252 84	0,023513 13	0,031866 19	0,040948 50	0,045667 49
97	0,016152 84	0,023432 42	0,031808 56	0,040911 19	0,045638 34
98	0,016055 03	0,023353 83	0,031752 81	0,040875 38	0,045610 48
99	0,015959 36	0,023277 30	0,031698 86	0,040841 00	0,045583 85
100	0,015865 74	0,023202 74	0,031646 67	0,040808 00	0,045558 39

Digitized by Google

XAS					ANNOS
5	6	7	8	10	
0,054528 67	0,063238 80	0,072293 65	0,081611 16	0,100780 46	51
0,054294 49	0,063046 17	0.072139 01	0,081489 59	0,100709 00	52
0,054073 34	0,062865 51	0,071995 09	0,081377 35	0,100644 13	53
0,053864 38	0,062696 02	0,071861 10	0,081273 70	0,100585 23	54
0,053666 86	0,062536 96	0,071736 33	0,081177 96	0,100531 75	55
0,053480 10	0,062387 65	0,071620 11	0,081089 52	0,100483 17	56
0,053303 43	0,062247 44	0.071511 83	0,081007 80	0,100439 06	57
0,053136 26	0,062115 73	0,071410 93	0,080932 28	0,100398 98	58
0,052978 02	0,061992 00	0,071316 89	0,080862 47	0,100362 58	59
0,052828 18	0,061875 72	0 071229 23	0,080797 95	0,100329 51	60
0,052686 27	0,061766 42	0,071147 49	0,080738 30	0,100299 46	61
0,052551 83	0,061663 66	0,071071 27	0,080683 14	0,100272 17	62
0,052424 42	0,061567 03	0,071000 19	0,080632 14	0,100247 36	63
0,052303 65	0,061476 15	0,070933 88	0,080584 97	0,100224 83	64
0,052189 15	0,061390 66	0,070872 03	0,080541 35	0,100204 34	65
0,052080 57	0,061310 22	0,070814 31	0,080501 00	0,100185 73	66
0,051977 57	0,061234 54	0,070760 46	0,080463 67	0,100168 82	67
0,051879 86	0,061163 30	0,070710 21	0,080429 14	0,100153 45	68
0,051787 15	0,061096 25	5,070663 30	0,080397 19	0,100139 48	69
0,051699 15	0,061033 13	6,070619 53	0,080367 64	0,100126 78	70
0,051615 63	0,060973 70	0,070578 66	0,080340 21	0,100115 24	71
0,051536 33	0,060917 74	0,070540 51	0,080314 98	0,100104 76	72
0,051461 03	0,060865 05	0,070504 90	0,080291 56	0,100095 22	73
0,051389 53	0,060815 42	0,070471 64	0,080269 90	0,100086 56	74
0,051321 61	0,060768 67	0,070440 60	0,080249 84	0,100078 68	75
0,051257 09	0,060724 63	0,070411 60	0,080231 28	0,100071 53	76
0,051195 80	0,060683 15	0,070384 53	0,080214 10	0,100065 02	77
0,051137 57	0,060644 07	0,070359 24	0,080198 20	0,100059 11	78
0,051082 22	0,060607 24	0,070335 63	0,080183 49	0,100053 73	79
0,051029 63	0,060572 54	0.070223 57	0,080169 87	0,100048 84	80
0,050979 63	0,060539 84	0,070292 97	0,080157 26	0,100044 40	81
0,050932 11	0,060509 03	0,070273 73	0,080145 59	0,100040 36	82
0,050886 94	0,060479 98	0,070255 76	0,080134 79	0,100036 69	83
0,050843 99	0,060452 61	0,070238 97	0,080124 79	0,100033 36	84
0,050803 16	0,060426 81	0,070313 29	0,080115 53	0,100030 32	85
0,050764 33	0,060402 49	0,070208 63	0,080106 96	0,100027 56	86
0,050727 40	0,060379 56	0,070194 95	0,080099 02	0,100025 06	87
0,050692 28	0,060357 95	0,070182 16	0,080091 68	0,100022 78	88
0,050658 88	0,060337 57	0,070170 21	0,080084 89	0,100020 71	89
0,050627 11	0,060318 36	0,070159 05	0,080078 60	0,100018 83	90
0,050596 89	0,060300 25	0,070148 63	0 080072 77	0,100017 11	91
0,050568 15	0,060283 18	0,070138 88	0,080067 37	0,100015 56	92
0,050540 80	0,060267 08	0.070129 78	0,080062 38	0,100014 14	93
0,050514 78	0,060251 90	0.070121 28	0,080057 75	0,100012 86	94
0,050490 03	0.060237 58	0,070113 33	0,080053 47	0 100011 69	95
0,050466 48	0,060224 08	0,070105 90	0,080049 51	0,100010 63	96
0,050444 07	0,060211 35	0,070098 97	0,080045 84	0,100009 66	97
0,050422 74	0,060199 35	0,070092 48	0,080042 44	0,100008 78	98
0,050402 45	0,060188 03	0.070086 43	0,080039 30	0,100007 98	99
0,050383 14	0,060177 36	0,070080 76	0,080036 38	0,100007 26	100

Digitized by Google

Problemas para a exemplificação da tabella V

Com o auxilio d'esta tabella podemos determinar o valor de *c*, a, *j* e *t*.

65.º *Que annuidade se deve pagar, para amortisar em 12 annos uma divida de 2:480$000 réis que vence juro á taxa de 8 %?*

Procuremos a annuidade que amortisa 1 real; é 0,13269502.

$$c = 2{:}480\$000 \times 0{,}13269502 = 329\$085 \text{ réis}$$

66.º *Que capital se poderá pagar com uma annuidade de 1:137$410 réis, entregues durante 10 annos e á taxa de 4 ½ %?*

$$a = 1{:}137\$410 : 0{,}12637882$$

$$a = 9{:}000\$000 \text{ réis}$$

67.º *A entrega de 20 annuidades de 100$000 réis, paga uma divida de 851$356 réis. Deseja-se saber a taxa.*

Procuremos a annuidade de 1 real, dividindo a annuidade pelo capital

$$c = \frac{100\$000}{851\$356} = 0{,}1174596$$

este numero encontramol-o na columna de 10 %, que é a taxa desejada.

68.º *Em quantos annos se amortisa uma divida de réis 6:000$000, suppondo que a annuidade é 427$375 réis e a razão do juro 7 %?*

A annuidade de 1 real é

$$\frac{427\$375}{6{:}000\$000} = 0{,}0712292$$

Na columna da taxa apresentada encontramos este numero que corresponde a 60 annos.

Digitized by Google

TABELLA VI

Valor actual de *t* annuidades de 1 real entregues no fim de cada anno, ou seja o valor primitivo da divida contrahida

Tabella construida com a applicação da formula

$$v = \frac{c}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)^t} \right]$$ *na qual se suppõe* $c = 1$, *e portanto*

$$v = \frac{1}{j} \times \left[1 - \frac{1}{(1+j)t} \right]$$

Digitized by Google

ANNOS	1	2	3	4	4 1/2
1	0,99009 90	0,98039 22	0,97087 33	0,96153 85	0,95693 78
2	1,97039 51	1,94156 09	1,91346 97	1,88609 47	1 87266 78
3	2,94098 52	2,88388 33	2,82861 14	2,77509 10	2 74896 44
4	3,90196 56	3,80772 87	3,71709 84	3,62989 52	3,58752 57
5	4,85343 12	4,71345 95	4,57970 72	4,45182 23	4,38997 67
6	5,79547 65	5,60143 09	5,41719 14	5,24213 69	5,15787 25
7	6.72819 45	6,47199 11	6,23028 50	6,00205 47	5,89270 09
8	7,65167 78	7,32548 14	7,01969 22	6,73274 49	6,59588 61
9	8,56601 76	8,16223 67	7,78610 89	7,43533 16	7,26879 05
10	9,47130 45	8.98258 50	8,53020 28	8,11089 58	7,91271 82
11	10,36762 82	9,78684 80	9,25262 41	8,76047 67	8,52891 69
12	11,25507 75	10,57534 12	9,95400 40	9,38507 38	9,11858 08
13	12,13374 01	11,34837 37	10,63495 53	9,98564 78	9,68285 24
14	13,00370 30	12,10624 88	11,29607 31	10.56312 29	10,22282 53
15	13,86505 25	12,84926 35	11,93793 51	11,11838 74	10,73954 57
16	14,71787 38	13,57770 93	12,56110 20	11,65229 56	11,23401 50
17	15,56225 13	14,29187 19	13,16611 85	12,16566 89	11,70719 14
18	16,39826 86	14,99203 13	13,75351 31	12,65929 70	12.15999 18
19	17,22600 85	15,67846 20	14,32379 91	13,13393 94	12,59329 36
20	18,04555 30	16,35143 33	14,87747 49	13,59032 63	13,00793 65
21	18,85698 31	17,01120 92	15,41502 41	14,02915 99	13,40472 39
22	19,66037 93	17,65804 82	15,93691 66	14,45111 53	13,78442 48
23	20,45582 11	18,29220 41	16,44360 84	14,85684 17	14 14777 49
24	21,24338 73	18,91392 56	16,93554 21	15,24696 31	14,49547 84
25	22,02315 57	19,52345 65	17,41314 77	15,62207 99	14,82820 90
26	22,79520 37	20,12103 58	17,87684 24	15,98276 92	15,14661 14
27	23,55960 76	20,70689 78	18,32703 15	16,32958 57	15,45130 28
28	24,31644 32	21,28127 24	18,76410 82	16,66306 32	15,74287 35
29	25,06578 53	21,84438 47	19,18845 46	16,98371 46	16,02188 85
30	25,80770 82	22,39645 56	19,60044 13	17,29203 33	16,28888 85
31	26,54228 54	22,93770 15	20,00042 85	17,58849 36	16,54439 10
32	27,26958 95	23,46833 48	20,38876 55	17,87355 15	16,78889 09
33	27,98969 25	23,98856 36	20,76579 18	18,14764 57	17,02286 21
34	28,70266 59	24,49859 17	21,13183 67	18,41119 78	17,24675 80
35	29,40558 01	24,99861 93	21,48722 01	18,66461 32	17,46101 24
36	30,10750 50	25,48884 25	21,83225 25	18,90828 20	17,66604 06
37	30,79950 99	25,96945 34	22,16723 54	19,14257 88	17,86223 98
38	31,48466 33	26,44064 06	22,49246 16	19,36786 42	18,04999 02
39	32,16303 30	26,90258 88	22,80821 51	19,58448 48	18,22965 57
40	32,83468 61	27,35547 92	23,11477 20	19,79277 39	18,40158 44
41	33,49968 92	27,79948 95	23,41240 00	19,99305 18	18,56610 95
42	34,15810 81	28,23479 36	23,70135 92	20,18562 67	18,72354 98
43	34 81000 81	28,66156 23	23,98190 21	20,37079 49	18,87421 03
44	35,45545 35	29,07996 31	24,25427 39	20,54884 13	19,01838 31
45	36,09450 84	29,49015 99	24,51871 25	20,72003 97	19,15634 74
46	36,72723 61	29,89231 36	24,77544 91	20,88465 36	19.28837 07
47	37,35369 91	30,28658 25	25,02470 78	21,04293 61	19 41470 88
48	37,97395 95	30,67311 96	25,26670 66	21,19513 09	19.53560 65
49	38,58807 87	31,05207 80	25,50165 69	21,34147 20	19 65129 81
50	39,19611 75	31,42360 59	25,72976 40	21,48218 46	19,76200 78

Digitized by Google

XAS					ANNOS
5	6	7	8	10	
0,95238 10	0,94339 62	0,93457 94	0,92592 59	0,90909 09	1
1,85941 04	1,83339 27	1,80801 82	1,78326 47	1,73553 72	2
2,72324 80	2,67301 19	2,62431 60	2,57709 70	2,48685 20	3
3,54595 05	3,46510 56	3,38721 12	3,31212 68	3,16986 54	4
4,32947 67	4,21236 38	4.10019 74	3,99271 01	3,79078 68	5
5,07569 21	4,91732 43	4,76653 97	4,62287 97	4.33526 07	6
5,78637 34	5,58238 14	5,38928 94	5,20637 01	4,86841 88	7
6,46321 2.	6,20979 38	5,97129 85	5,74663 89	5,33492 62	8
7,10782 17	6,80169 23	6,51523 22	6,24688 79	5,75902 38	9
7,72173 49	7,36008 71	7,02358 15	6,71008 14	6,14456 71	10
8,30641 42	7,88687 46	7,49867 43	7,13896 43	6,49506 10	11
8,86325 16	8,38384 39	7,94268 63	7,53607 80	6,81369 18	12
9,39357 30	8,85268 30	8,35765 07	7,90377 59	7,10335 62	13
9.89864 09	9,29498 39	8,74546 80	8,24423 70	7,36668 75	14
10,37965 80	9,71224 90	9,10791 40	8,55947 87	7,60607 95	15
10,83776 96	10,10589 53	9,44664 86	8,85136 92	7,82370 86	16
11,27406 62	10,47725 97	9,76322 30	9,12163 81	8,02155 33	17
11,68958 69	10,82760 35	10,05908 69	9,37188 71	8 20141 21	18
12,08532 09	11,15811 65	10,33559 52	9,60359 92	8,36492 01	19
12,46221 03	11,46992 12	10,59401 42	9,81814 74	8,51356 37	20
12,82115 27	11,76407 66	10,83552 73	10,01680 31	8.64869 43	21
13,16300 26	12,04158 17	11,06124 05	10,20074 37	8,77154 03	22
13,48857 39	12,30337 90	11,27218 74	10,37105 89	8,88321 84	23
13,79864 18	12,55035 75	11,46933 40	10,52875 83	8,98474 40	24
14,09394 46	12,78335 62	11,65358 32	10,67477 62	9,07704 00	25
14,37518 53	13,00316 62	11,82577 87	10,80997 79	9,16094 55	26
14,64303 36	13,21053 41	11,98670 90	10,93516 48	9,23722 32	27
14,89812 73	13,40616 43	12,13711 12	11,05107 85	9,30656 65	28
15,14107 36	13,59072 10	12,27767 41	11,15840 60	9,36960 59	29
15,37245 10	13,76483 12	12,40904 12	11,25778 33	9,42691 45	30
15,57281 05	13,92908 60	12,53181 42	11,34979 94	9,47901 31	31
15,80267 67	14,08404 34	12,64655 53	11,43499 94	9,52637 56	32
16,00254 92	14,23022 96	12,75379 00	11,51388 84	9,56943 24	33
16,19290 40	14,36814 11	12,85400 94	11,58693 37	9,60857 49	34
16,37419 43	14,49824 64	12,94767 23	11,65456 82	9,64415 90	35
16,54685 17	14,62098 71	13,03520 78	11,71719 28	9,67650 82	36
16,71128 73	14,73678 03	13,11701 66	11,77517 85	9,70591 65	37
16,86789 27	14,84601 92	13,19347 34	11,82886 90	9,73265 14	38
17,01704 07	14,94907 47	13,26492 85	11,87858 24	9 75695 59	39
17,15908 64	15,04629 69	13,33170 88	11,92461 33	9,77905 07	40
17,29436 80	15,13801 59	13,39412 04	11,96723 46	9,79913 70	41
17,42320 76	15,22454 33	13,45244 90	12,00669 87	9,81739 73	42
17,54591 20	15,30617 29	13,50696 17	12,04323 95	9,83399 75	43
17,66277 33	15,38318 20	13,55790 81	12,07707 36	9,84908 87	44
17,77406 98	15,45583 21	13,60552 16	12,10840 15	9,86280 79	45
17,88006 65	15,52436 99	13,65002 01	12,13740 88	9,87527 99	46
17,98101 57	15,58902 82	13,69160 76	12,16426 74	9,88661 81	47
18,07715 78	15,65002 66	13,73047 44	12,18913 65	9,89692 55	48
18,16872 17	15,70757 23	13,76679 85	12,21216 34	9,90629 59	49
18,25592 55	15,76186 06	13,80074 63	12,23348 46	9,91481 45	50

Digitized by Google

ANNOS	1	2	3	4	4 1/2
51	39,79813 62	31,78784 89	25,95122 72	21,61748 52	19,86795 00
52	40,39419 42	32,14494 99	26 16624 00	21,74758 19	19,96933 02
53	40,98435 07	32,49504 89	26,37499 03	21,87267 49	20,06634 47
54	41,56866 41	32,83828 33	26,57766 05	21,99295 67	20,15918 15
55	42,14719 22	33,17478 75	26,77442 76	22,10861 22	20,24802 06
56	42,71999 22	33,50469 36	26,96546 37	22,21981 94	20,33303 40
57	43,28712 10	33,82813 10	27,15093 57	22,32674 94	20,41438 66
58	43,84863 47	34,14522 65	27,33100 55	22,42956 68	20,49223 60
59	44,40458 88	34,45610 44	27,50583 06	22,52842 96	20,56673 30
60	44,95503 84	34,76088 67	27,67556 37	22,52349 00	20,63802 20
61	45,50003 80	35,05969 28	27,84035 31	22,71489 42	20,70624 12
62	46,03964 16	35,35264 00	28,00034 28	22,80278 29	20,77152 27
63	46,57390 26	35,63984 32	28,15567 26	22,88729 12	20,83399 30
64	47,10287 38	35,92141 49	28,30647 83	22,96854 93	20,89377 32
65	47,62660 78	36,19746 55	28,45289 15	23,04668 20	20,95097 91
66	48,14515 62	36,46810 35	28,59504 03	23,12180 96	21,00572 17
67	48,65867 05	36,73343 48	28,73304 88	23,19404 77	21,05810 68
68	49,16690 15	36,99356 35	28,86703 77	23,26350 74	21,10823 62
69	49 67019 95	37,24859 17	28,99712 40	23,33029 56	21,15620 69
70	50,16851 43	37,49861 93	29,12342 14	23,39451 50	21,20211 19
71	50,66189 54	37,74374 44	29,24604 01	23,45626 44	21,24604 01
72	51,15039 15	37,98406 31	29,36508 75	23,51563 88	21,28807 66
73	51,63405 10	38,21966 97	29,48066 75	23,57272 97	21,32830 30
74	52,11292 18	38,45065 66	29,59288 11	23,62762 47	21,36679 71
75	52,58705 12	38,67711 43	29,70182 63	23,68040 83	21,40363 36
76	53,05648 64	38,89913 17	29,80759 83	23,73116 19	21,43888 38
77	53 52127 36	39,11679 58	29,91028 96	23,77996 33	21,47261 61
78	53,98145 90	39,33019 19	30,00998 99	23,82688 78	21,50489 58
79	54,43708 82	39,53940 39	30,10678 63	23,87200 75	21,53578 54
80	54,88820 61	39,74451 36	30,20076 34	23,91539 18	21,56534 49
81	55,33485 75	39,94560 16	30,29200 33	23,95710 75	21,59363 15
82	55,77708 67	40,14274 66	30,38058 58	23,99721 88	21,62070 00
83	56,21493 73	40,33602 61	30,46658 81	24,03578 73	21,64660 29
84	56,64845 28	40,52551 58	30,55008 56	24,07287 24	21,67139 03
85	57,07767 60	40,71129 00	30,63115 10	24,10853 12	21,69511 03
86	57,50264 95	40,89342 16	30,70985 54	24,14281 84	21,71780 89
87	57 92341 54	41 07198 19	30,78626 73	24,17578 69	21,73953 01
88	58,34001 52	41,24704 11	30,86045 37	24,20748 74	21,76031 59
89	58,75249 03	41 41866 77	30,93247 94	24,23796 87	21,78020 66
90	59,16088 15	41,58692 92	31,00240 71	24,26727 76	21,79924 07
91	59,56522 92	41,75189 13	31,07029 82	24,27545 92	21,81745 53
92	59 96557 35	41,91361 90	31,13621 18	24,32255 69	21,83488 54
93	60,36195 39	42,07217 54	31,20020 57	24,34861 24	21,85156 50
94	60,75440 98	42,22762 30	31,26233 56	24,37366 58	21,86752 63
95	61,14298 00	42,38002 25	31,32265 59	24,39775 56	21,88280 03
96	61,52770 30	42,52943 39	31,38121 93	24,42091 88	21,89741 66
97	61 90861 68	42,67591 55	31 43807 70	24,44319 12	21,91140 34
98	62,28575 92	42,81952 50	31,49327 87	24,46460 69	21,92478 79
99	62 65916 76	42,96031 87	31,54687 25	24,48519 90	21,93759 61
100	63 02887 88	43,09835 16	31,59890 53	24 50499 90	21,94985 27

Digitized by Google

5	6	7	8	10	ANNOS
18,33897 66	15,81307 61	13,83247 32	12,25322 65	9,92255 86	51
18,41807 30	15,86139 25	13,86212 45	12,27150 60	9,92959 87	52
18,49340 28	15,90697 41	13,88983 59	12,28843 15	9,93599 89	53
18,56514 56	15,94997 55	13,91573 45	12,30410 33	9,94181 71	54
18,63347 20	15,99054 30	13,93993 88	12,31861 41	9,94710 65	55
18,69854 47	16,02881 41	13,96255 96	12,33205 01	9,95191 50	56
18,76051 88	16,06491 90	13,98370 06	12,34449 08	9,95628 64	57
18,81954 17	16,09898 02	14,00345 85	12,35601 00	9,96026 03	58
18,87575 40	16,13111 34	14,02192 38	12,36667 60	9,96387 30	59
18,92928 95	16,16142 77	14 03918 11	12,37655 18	9,96715 73	60
18,98027 57	16,19002 61	14,05530 95	12,38569 61	9,97014 30	61
19,02883 40	16,21700 58	14,07038 27	12,39416 31	9,97285 73	62
19,07508 00	16,24245 83	14,08446 98	12,40200 29	9,97532 48	63
19,11912 38	16,26647 01	14,09763 53	12 40926 19	9,97756 80	64
19,16107 03	16,28912 27	14,10993 96	12,41598 32	9,97960 73	65
19,20101 94	16,31049 31	14,12143 88	12,42220 67	9,98146 11	66
19,23906 61	16,33065 39	14,13218 58	12,42796 92	9,98314 65	67
19,27530 10	16,34967 35	14,14222 97	12,43330 48	9,98467 86	68
19,30981 05	16,36761 65	14,15161 66	12,43824 52	9,98607 15	69
19,34267 66	16,38454 39	14,16038 93	12.44281 96	9,98733 77	70
19,37397 78	16.40051 31	14,16858 82	12,44705 52	9,98848 88	71
19,40378 83	16 41557 84	14,17625 06	12,45097 70	9,98953 53	72
19,43217 94	16,42979 09	14,18341 18	12,45460 84	9,99048 66	73
19.45921 85	16.44319 90	14,19010 45	12,45797 07	9,99135 15	74
19,48497 00	16,45584 81	14,19635 93	12,46108 40	9,99213 77	75
19,50949 52	16,46778 12	14,20220 50	12,46396 67	9,99285 25	76
19,53285 26	16,47903 89	14,20766 82	12,46663 58	9,99350 22	77
19,55509 77	16,48965 93	14,21277 40	12,46910 72	9,99409 29	78
19,57628 35	16,49967 86	14,21754 58	12,47139 56	9,99462 99	79
19,59646 05	16,50913 08	14.22200 54	12,47351 42	9,99511 81	80
19,61567 67	16,51804 79	14.22617 33	12 47547 63	9,99556 19	81
19,63397 78	16,52646 03	14,23006 85	12,47729 29	9,99596 54	82
19,65140 74	16,53439 65	14,23370 90	12.47897 49	9,99633 23	83
19,66800 70	16,54188 35	14,23711 11	12,48053 23	9,99666 56	84
19,68381 62	16,54894 67	14,24029 07	12,41197 44	9,99696 87	85
19,69887 26	16,55561 01	14,24326 24	12,48330 96	9.99724 43	86
19.71321 20	16,56189 63	14,24603 96	12,48454 59	9,99749 48	87
19,72686 86	16,56782 67	14,24863 51	12,48569 07	9,99772 26	88
19,73987 48	16,57342 14	14,25106 09	12,48675 06	9,99792 96	89
19,75226 17	16,57869 94	14,25332 79	12.48773 20	9.99811 78	90
19,76405 88	16,58367 87	14,25544 67	12,48864 08	9 99828 89	91
19,77529 41	16.58837 62	14,25742 68	12,48948 22	9 99844 45	92
19,78599 44	16,59280 77	14.25927 74	12,49026 13	9.99858 59	93
19,79618 51	16,59698 84	14 26100 69	12,49098 27	9.99871 44	94
19,80589 06	16.60093 24	14,26262 33	12.49165 06	9,99883 13	95
19.81513 39	16,60465 32	14,26413 39	12,49226 91	9 99893 76	96
19 82393 70	16,60816 34	14,26554 57	12,49284 18	9.99903 41	97
19,83232 10	16,61147 49	14,26686 51	12,49337 20	9 99912 19	98
19,84030 57	16,61459 60	14.26809 82	12,49386 30	9.99920 18	99
19,84791 02	16,61754 62	14,26925 07	12,49431 76	9.99927 43	100

Digitized by Google

Problemas para exemplificação da tabella VI

69.º *Qual é o valor primitivo do emprestimo, contrahido á taxa de 5 %₀ e pago com 10 annuidades de 600$000 réis?*

O numero 7,7217349 é o valor actual de 10 annuidades de 1 real. Logo

$$v = 600\$000 \times 7{,}7217349$$

$$v = 4{:}633\$040 \text{ réis}$$

Como sabemos, este valor collocado a juros compostos durante 10 annos e á taxa de 5 %₀, dá uma somma egual á produzida pelas 10 annuidades. Desenvolvemos este assumpto quando tratamos da applicação das formulas 20 e 22.

70.º *Hypothecou-se na Companhia Geral do Credito Predial uma propriedade urbana por uma quantia, que deve ser paga em 24 annuidades de 400$000 réis. Suppondo a taxa 6 %₀, deseja-se saber que quantia recebeu o mutuario.*

Como no caso anterior

$$v = 400\$000 \times 12{,}5503575$$

$$v = 5{:}020\$143 \text{ réis}$$

Digitized by Google

TABELLA VII

Taxa annual de amortisação para extinguir um capital em *t* annos[1]

Tabella construida com a applicação da formula

$$p = \frac{j}{(1+j)^t - 1}$$

[1] E' preciso notar que as quantidades expressas n'esta tabella são em relação a 1 real.

Digitized by Google

ANNOS	TAXAS			
	3	3 1/2	4	4 1/2
1	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
2	0 492 611	0,491 400	0,490 196	0,488 998
3	0,323 530	0,321 934	0,320 349	0,318 774
4	0,239 027	0,237 251	0,235 489	0,233 743
5	0,188 355	0,186 481	0,184 627	0,182 792
6	0,154 598	0,152 668	0,150 762	0,148 878
7	0,130 506	0,128 544	0,126 610	0,124 701
8	0,112 456	0,110 477	0,108 528	0,106 609
9	0,098 434	0,096 446	0,094 493	0,092 575
10	0,087 231	0,085 241	0,083 291	0,081 379
11	0,078 077	0,076 092	0,074 149	0,072 248
12	0,070 462	0,068 484	0,066 552	0,064 666
13	0,064 030	0,062 062	0,060 144	0,058 275
14	0,058 526	0,056 571	0,054 669	0,052 820
15	0,053 767	0,051 825	0,049 942	0,048 114
16	0,049 611	0,047 685	0,045 820	0,044 015
17	0,045 953	0,044 043	0,042 199	0,040 418
18	0,042 709	0,040 817	0,038 993	0,037 237
19	0,039 814	0,037 940	0,036 139	0,034 407
20	0,037 216	0,035 361	0,033 582	0,031 876
21	0,034 872	0,033 037	0,031 280	0,029 601
22	0,032 747	0,030 932	0,029 199	0,027 546
23	0,030 814	0,029 019	0,027 309	0,025 682
24	0,029 047	0,027 273	0,025 587	0,023 987
25	0,027 428	0,025 674	0,024 012	0,022 439
26	0,025 938	0,024 205	0,022 567	0,021 021
27	0,024 564	0,022 852	0,021 239	0,019 719
28	0,023 293	0,021 603	0,020 013	0,018 521
29	0,022 115	0,020 445	0,018 880	0,017 415
30	0,021 019	0,019 371	0,017 830	0,016 392
31	0,019 999	0,018 372	0,016 855	0,015 442
32	0,019 047	0,017 442	0,015 949	0,014 563
33	0,018 156	0,016 572	0,015 103	0,013 745
34	0,017 322	0,015 760	0,014 315	0,012 982
35	0,016 539	0,014 998	0,013 577	0,012 270
36	0,015 804	0,014 284	0,012 887	0,011 606
37	0,015 112	0,013 613	0,012 240	0,010 984
38	0,014 459	0,012 982	0,011 632	0,010 402
39	0,013 844	0,012 388	0,011 061	0,009 856
40	0,013 262	0,011 827	0,010 523	0,009 343
41	0,012 712	0,011 298	0,010 017	0,008 862
42	0,012 192	0,010 798	0,009 540	0,008 409
43	0,011 698	0,010 325	0,009 090	0,007 982
44	0,011 230	0,009 878	0,008 665	0,007 581
45	0,010 785	0,009 453	0,008 263	0,007 202
46	0,010 363	0,009 051	0,007 882	0,006 845
47	0,009 961	0,008 669	0,007 522	0,006 507
48	0,009 578	0,008 306	0,007 181	0,006 189
49	0,009 213	0,007 962	0,006 858	0,005 887
50	0,008 866	0,007 634	0,006 550	0,005 602

Digitized by Google

DE JURO

5	5 1/2	6	6 1/2	ANNOS
1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1
0,487 805	0,486 618	0,485 437	0,484 262	2
0,317 209	0,315 655	0,314 110	0,312 575	3
0,232 012	0,230 244	0,228 591	0,226 903	4
0,180 975	0,179 176	0,177 397	0,175 634	5
0,147 017	0,145 179	0,143 363	0,141 568	6
0,122 820	0,120 464	0,119 135	0,117 331	7
0,104 722	0,102 864	0,101 036	0,099 237	8
0,090 690	0,088 840	0,087 022	0,085 239	9
0,079 504	0,077 668	0,075 868	0,074 105	10
0,070 389	0,068 571	0,066 793	0,065 055	11
0,062 825	0,061 029	0,059 277	0,057 567	12
0,056 456	0,054 684	0,052 960	0,051 283	13
0,051 024	0,049 279	0,047 585	0,045 941	14
0,046 342	0,044 626	0,042 963	0,041 353	15
0,042 270	0,040 584	0,038 952	0,037 378	16
0,038 699	0,037 $42	0,035 445	0,033 906	17
0,035 546	0,033 920	0,032 357	0,030 855	18
0,032 745	0,031 150	0,029 621	0,028 156	19
0,030 243	0,028 679	0,027 185	0,025 756	20
0,027 996	0,026 465	0,025 005	0,023 613	21
0,025 971	0,024 471	0,023 046	0,021 691	22
0,024 137	0,022 670	0,021 278	0,019 961	23
0,022 471	0,021 036	0,019 679	0,018 398	24
0,020 952	0,019 549	0,018 227	0,016 981	25
0,019 564	0,018 193	0,016 904	0,015 695	26
0,018 292	0,016 952	0,015 697	0,014 523	27
0,017 123	0,015 814	0,014 593	0,013 453	28
0,016 046	0,014 769	0,013 580	0,012 474	29
0,015 051	0,013 805	0,012 649	0,011 577	30
0,014 132	0,012 917	0,011 792	0,010 754	31
0,013 280	0,012 095	0,011 002	0,009 997	32
0,012 490	0,011 335	0,010 273	0,009 299	33
0,011 755	0,010 630	0,009 598	0,008 656	34
0,011 072	0,009 975	0,008 974	0,008 062	35
0,010 434	0,009 366	0,008 395	0,007 513	36
0,009 840	0,008 800	0,007 857	0,007 005	37
0,009 284	0,008 272	0,007 358	0,006 535	38
0,008 765	0,007 780	0,006 894	0,006 099	39
0,008 278	0,007 320	0,006 462	0,005 694	40
0,007 822	0,006 891	0,006 059	0,005 318	41
0,007 395	0,006 489	0,005 683	0,004 968	42
0,006 993	0,006 113	0,005 333	0,004 644	43
0,006 616	0,005 761	0,005 006	0,004 341	44
0,006 262	0,005 431	0,004 701	0,004 060	45
0,005 928	0,005 122	0,004 415	0,003 797	46
0,005 614	0,004 831	0,004 148	0,003 553	47
0,005 318	0,004 559	0,003 898	0,003 325	48
0,005 040	0,004 302	0,003 664	0,003 112	49
0,004 777	0,004 061	0,003 444	0,002 914	50

Digitized by Google

Problemas para exemplificação da tabella VII

21.º *Qual deve ser a taxa de amortisação para se pagar um emprestimo em 31 annos á taxa de 3 %?*

O numero, que na tabella corresponde a 3 % e a 31 annos é 0,019999 ou simplesmente 0,02. Este numero significa que deverá satisfazer-se em cada anno 2 % do capital emprestado, para o amortisar em 31 annos. Portanto

para amortisação é necessario	*2 %*
» juro » »	*3 %*
Total.....	*5 %*

de fórma que, em 31 annos com uma annuidade de 5 % pode-se amortisar o capital e satisfazer os respectivos juros. E' claro, que este resultado é invariavel para qualquer que seja a divida que se deseja pagar.

22.º *Tendo-se contrahido um emprestimo á taxa de 4 %, reembolsavel em 9 annos, deseja-se saber que percentagem de capitat se tem de entregar annualmente.*

Consultando a tabella vê-se que a taxa de amortisação pedida é 0,094493 ou approximadamente 9 3/4 %. Como porém, o emprestimo vence de juro 4 %, temos que pagar uma totalidade annual de 13 3/4 %, para o extinguir em 9 annos.

Digitized by Google

TABELLA VIII

Tempo necessario para amortisar uma divida, conhecendo-se a taxa de juro das annuidades e a importancia annual — por cada unidade — que se destina á amortisação

Tabella construida com a applicação da formula

$$t = \frac{\log.\,(j+p) - \log.\,p}{\log.\,(1+j)} \quad (1)$$

---

[1] Para achar, por exemplo, o tempo necessario para extinguir uma divida, destinando 3 % para amortisação e 5 % para juro, teremos

$$t = \frac{\log.\,(0{,}05 + 0{,}03) - \log.\,0{,}03}{\log.\,1{,}05} = \frac{0{,}42596874}{0{,}0211893}$$

$$t = 20 \text{ annos e } 38 \text{ dias}$$

quantidade que encontramos na columna correspondente.

Digitized by Google

Taxas de amortisação		TAXAS							
		3		3 1/2		4		4 1/2	
Quebrados	Fracções decimaes	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias
1/10	0,001	116	64	104	61	94	250	86	358
1/5	0,002	93	292	84	298	77	228	71	264
1/4	0,0025	86	283	78	263	72	87	66	326
3/10	0,003	81	45	73	294	67	324	62	361
2/5	0,004	72	146	66	72	61	51	56	337
1/2	0,005	65	304	60	163	56	8	52	114
3/5	0,006	60	225	55	316	51	341	48	226
7/10	0,007	56	120	52	31	48	202	45	204
3/4	0,0075	54	164	50	155	47	23	44	76
4/5	0,008	52	261	48	324	45	250	42	350
9/10	0,009	49	222	46	48	43	76	40	258
1	0,01	46	328	43	264	41	13	38	266
1 1/10	0,011	44	187	41	216	39	40	36	355
1 1/5	0,012	42	140	39	251	37	141	35	146
1 1/4	0,0125	41	147	38	295	36	216	34	245
1 3/10	0,013	40	172	37	355	35	304	33	256
1 2/5	0,014	38	271	36	152	34	153	32	248
1 1/2	0,015	37	61	35	0	33	47	31	181
1 3/5	0,016	35	266	33	255	31	344	30	148
1 7/10	0,017	34	148	32	183	30	309	29	145
1 3/4	0,0175	33	285	31	342	30	121	28	336
1 4/5	0,018	33	66	31	143	29	304	28	168
1 9/10	0,019	32	19	30	133	28	325	27	216
2	0,02	31	0	29	148	28	4	26	284
2 1/4	0,0225	28	243	27	100	26	18	24	350
2 1/2	0,025	26	246	25	164	24	132	23	143
2 3/4	0,0275	24	349	23	316	22	327	22	8
3	0,03	23	164	22	174	21	220	20	299
3 1/4	0,0325	22	45	21	90	20	167	19	271
3 1/2	0,035	20	344	20	54	19	158	18	285
3 3/4	0,0375	19	323	19	60	18	186	17	334
4	0,04	18	341	18	100	17	246	17	46

As taxas de amortisação, são como na tabella anterior,

Digitized by Google

DE JURO								Taxas de amortisação	
5		5 1/2		6		6 1/2			
Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Annos	Dias	Quebrados	Fracções decimaes
80	214	75	67	70	201	66	193	1/10	0,001
66	284	62	207	58	341	55	278	1/5	0,002
62	146	58	206	55	88	52	123	1/4	0,0025
58	317	55	117	52	91	49	204	3/10	0,003
53	126	50	97	47	213	45	80	2/5	0,004
49	54	46	150	44	7	41	331	1/2	0,005
45	285	43	115	41	56	39	87	3/5	0,006
42	359	40	270	38	279	37	4	7/10	0,007
41	273	39	220	37	259	36	9	3/4	0,0075
40	220	38	199	36	266	35	40	4/5	0,008
38	197	36	237	34	350	33	166	9/10	0,009
36	265	34	351	33	144	31	363	1	0,01
35	40	33	170	32	1	30	253	1 1/10	0,011
33	241	32	44	30	274	29	189	1 1/5	0,012
32	361	31	182	30	61	28	355	1 1/4	0,0125
32	126	30	330	29	224	28	165	1 3/10	0,013
31	55	29	289	28	210	27	175	1 2/5	0,014
30	20	28	282	27	227	26	213	1 1/2	0,015
29	16	37	304	26	271	25	276	1 3/5	0,016
28	40	26	351	25	338	24	360	1 7/10	0,017
27	244	26	200	25	197	24	228	1 3/4	0,0175
27	88	26	55	25	60	24	99	1 4/5	0,018
26	158	25	144	24	167	23	220	1 9/10	0,019
25	247	24	251	23	289	22	357	2	0,02
23	359	23	36	22	109	21	207	2 1/4	0,0225
22	189	21	265	21	1	20	124	2 1/2	0,025
21	86	20	190	19	316	19	96	2 3/4	0,0275
20	38	19	165	18	312	18	111	3	0,03
19	34	18	182	17	347	17	163	3 1/4	0,0325
18	68	17	234	17	50	16	245	3 1/2	0,035
17	133	16	315	16	145	15	353	3 3/4	0,0375
16	227	16	57	15	265	15	119	4	00,4

em relação 1 real.

Digitized by Google

Problemas para exemplificação da tabella VIII

73.º *No fim de que tempo se liquida um emprestimo para o qual se paga annualmente 3 3/4 % do capital para amortisação e 4 % para juro?*

Procurando na tabella a linha horisontal de 3 3/4 % e a columna vertical de 4 % encontramos 18 annos e 186 dias, ou seja approximadamente 18 annos e meio.

FIM

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google